Лекция 10. Интеграл

В качестве приложения понятий равномерной непрерывности и равномерной сходимости мы построим простую теорию интегрирования. Реально нам будут нужны интегралы от непрерывных функций (в крайнем случае кусочно-непрерывных), но технически удобнее работать с более широким классом. Начнем с определений.

Определение 10.1. Пусть $[a;b] \subset \mathbb{R}$ — отрезок. Функция $f\colon [a;b] \to \mathbb{C}$ называется *кусочно-непрерывной*, если существуют такие числа $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$, что для каждого i функция f непрерывна на интервале $(a_i; a_{i+1})$ и существуют пределы $\lim_{x\to a_i+0} f(x)$, $\lim_{x\to a_{i+1}-0} f(x)$.

Далее последовательность чисел $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$ будем называть *разбиением* отрезка $[a;b]$.

Определение 10.2. Пусть $[a;b] \subset \mathbb{R}$ — отрезок. Функция $f\colon [a;b] \to \mathbb{C}$ называется *ступенчатой*, если существуют такие числа $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$, что функция f постоянна на каждом интервале $(a_i; a_{i+1})$.

(Условий на значения функции в точках a_i не накладывается.) Заметим, что ступенчатые функции образуют векторное пространство; мы будем его обозначать $PC([a;b]) \subset B([a;b])$ (напомним, что в предыдущей лекции через B было обозначено пространство ограниченных функций).

Надо полагать, что читатель знаком с интуитивной трактовкой интеграла по отрезку $[a;b]$ от функции с вещественными значениями как площади фигуры, ограниченной ее графиком, осью абсцисс и прямыми $x = a$ и $x = b$ (участки фигуры, лежащие ниже оси абсцисс, считаются со знаком минус). Эта интерпретация мотивирует следующее определение интеграла от *ступенчатой* функции:

Определение 10.3. Пусть $[a;b] \subset \mathbb{R}$ — отрезок и $f\colon [a;b] \to \mathbb{C}$ — функция, ступенчатая относительно разбиения $a_1, \ldots, a_n$. *Интегралом* от функции f по отрезку $[a;b]$ называется сумма

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i - a_{i-1}) \cdot c_i,$$

где c_i — значение функции f на интервале (a_{i-1}, a_i).

Интеграл от ступенчатой функции f по отрезку $[a;b]$ обозначается $\int_a^b f(x)\,dx$.

Предложение 10.4. *Интеграл от ступенчатой функции обладает следующими свойствами:*

1) *Интеграл по отрезку $[a;b]$ от ступенчатой функции f не зависит от выбора разбиения отрезка, относительно которого f будет ступенчатой.*

2) *Если f, g — ступенчатые функции на отрезке $[a;b]$ и $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ — константы, то*

$$\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x))\, dx = \lambda \int_a^b f(x)\, dx + \mu \int_a^b g(x)\, dx.$$

3) *Если f — ступенчатая функция на отрезке $[a;b]$, то*

$$\left| \int_a^b f(x)\, dx \right| \leqslant (b-a)\|f\|$$

(напомним, что $\|f\| = \sup_{x\in[a;b]} |f(x)|$).

Доказательство. Пункты (1) и (2) предоставляются читателю. Для доказательства пункта (3) заметим, что, если f ступенчата относительно $a_1, \ldots, a_n$ и c_i — ее значение на $(a_{i-1}; a_i)$, то $|c_i| \leqslant \|f\|$ для всех i, так что $\left|\int_a^b f(x)\, dx\right| \leqslant \sum(a_i - a_{i-1})|c_i| \leqslant \sum(a_i - a_{i-1})\|f\|$. □

Теперь распространим определение интеграла на более широкий класс функций.

Определение 10.5. Обозначим через $QC([a;b])$ замыкание (относительно sup-нормы) подпространства ступенчатых функций в $B([a;b])$. Всякая функция $f \in QC([a;b])$ называется *хорошей* (термин необщепринятый).

Замечание 10.6. Из равенства $\lim_{n\to\infty}(f_n+g_n) = \lim_{n\to\infty} f_n + \lim_{n\to\infty} g_n$ вытекает, что $QC([a;b])$ также является векторным подпространством в $B([a;b])$.

Проверим, что непрерывные и кусочно-непрерывные функции являются хорошими.

Предложение 10.7. *Всякая функция, непрерывная на отрезке $[a;b]$, является хорошей.*

Доказательство. Пусть f непрерывна на $[a;b]$; достаточно доказать, что для любого $\varepsilon > 0$ существует ступенчатая функция g, для которой $\|f - g\| \leqslant \varepsilon$. В самом деле, поскольку ввиду теоремы 9.8 функция f равномерно непрерывна на $[a;b]$, найдется такое число $\delta > 0$, что из неравенства $|x - y| < \delta$ следует неравенство $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Если $a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b$ — разбиение отрезка $[a;b]$ на отрезки длины, меньшей δ, и g — ступенчатая функция, у которой значение на каждом интервале вида $[a_i; a_{i+1})$, где $0 \leqslant i < n$, равно $f(a_i)$, а значение в b равно $g(b)$, то функция g, очевидно, будет искомой. $\square$

Следствие 10.8. *Всякая кусочно-непрерывная функция является хорошей.* $\square$

Теперь распространим определение интеграла с кусочно-непрерывных функций на хорошие. Это делается с помощью следующего общего факта.

Предложение 10.9. *Пусть Y — подмножество в метрическом пространстве X, и пусть C — полное метрическое пространство. Если $f\colon Y \to C$ — равномерно непрерывное отображение, то оно продолжается, причем единственным образом, до непрерывного отображения $\bar{f}\colon \bar{Y} \to C$, где $\bar{Y}$ — замыкание Y.*

Следствие 10.10. *Если $f\colon Y \to C$ — равномерно непрерывное отображение из метрического пространства Y в полное метрическое пространство C, то оно продолжается, причем единственным образом, до непрерывного отображения из пополнения Y в C.*

Доказательство предложения. Единственность продолжения очевидна (для этого не нужна ни равномерная непрерывность, ни полнота C): если $y \in \bar{Y}$ и $y = \lim y_n$, где $y_j \in Y$, то с неизбежностью $\bar{f}(y) = \lim f(y_n)$.

Для доказательства существования заметим, что если $y = \lim y_n$, где $y_j \in Y$, то последовательность $\{f(y_n)\}$ сходится. В самом деле, для данного $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что $\rho(f(u), f(v)) < \varepsilon$, как только $\rho(u, v) < \delta$. Поскольку последовательность $\{y_n\}$ сходится, существует такое $N \in \mathbb{N}$, что $\rho(y_m, y_n) < \delta$, как только $m, n \geqslant N$; следовательно, $\rho(f(y_m), f(y_n)) < \varepsilon$, как только $m, n \geqslant N$, так что последовательность $\{f(y_n)\}$ фундаментальна и тем самым сходится.

Далее, заметим, что если $\lim y_n = \lim y'_n$, то $\lim f(y_n) = \lim f(y'_n)$: в самом деле, $\lim y_n = \lim y'_n$ тогда и только тогда, когда $\lim \rho(y_n, y'_n) = 0$, и из этого равенства и равномерной непрерывности f вытекает, что $\lim \rho(f(y_n), f(y'_n)) = 0$. Поэтому определение $\bar{f}$ по формуле $\bar{f}(y) = \lim f(y_n)$, где $y = \lim y_n$ и все y_j лежат в Y, является корректным.

Остается показать, что функция $\bar{f}$ непрерывна на $\bar{Y}$. Покажем, что она даже равномерно непрерывна. В самом деле, пусть $\varepsilon > 0$. Так как f равномерно непрерывна на Y, существует такое $\delta > 0$, что если $u, v \in Y$ и $\rho(u, v) < \delta$, то $\rho(f(u), f(v)) < \varepsilon/3$. Покажем, что если $\rho(x, y) < \delta/2$, то $\rho(\bar{f}(x), \bar{f}(y)) < \varepsilon$. В самом деле, пусть $x, y \in \bar{Y}$, причем $x = \lim x_n$, $y = \lim y_n$, и все x_j, y_j лежат в Y. Поскольку, очевидно, $\rho(x, y) = \lim \rho(x_n, y_n)$ и $\rho(\bar{f}(x), \bar{f}(y)) = \lim \rho(f(x_n), f(y_n))$, существует такое $n \in \mathbb{N}$, что $\rho(f(x_n), \bar{f}(x)) < \varepsilon/3$, $\rho(f(y_n), \bar{f}(y)) < \varepsilon/3$ и $|\rho(x_n, y_n) - \rho(x, y)| < \delta/2$; из последнего неравенства вытекает, что $\rho(x_n, y_n) < \delta$, откуда $\rho(f(x_n), f(y_n)) < \varepsilon/3$. Значит,

$$\begin{aligned}
&\rho(\bar{f}(x), \bar{f}(y)) \leqslant \\
&\qquad \leqslant \rho(f(x_n), \bar{f}(x)) + \rho(f(y_n), \bar{f}(y)) + \rho(f(x_n), f(y_n)) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

□

Обозначим теперь через $I\colon PC([a;b]) \to \mathbb{C}$ отображение, ставящее в соответствие функции ее интеграл. Из предложения 10.4(3) вытекает, что если $\|f - g\| < \varepsilon/(b-a)$, то $|I(f) - I(g)| < \varepsilon$, так что отображение I равномерно непрерывно на $PC([a;b])$. В силу предложения 10.9 это отображение единственным образом продолжается на пространство $QC([a;b])$ хороших функций. Это продолжение мы и будем называть интегралом. Из доказательства предложения 10.9 ясно, что $\int_a^b g(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b g_n(x)\,dx$, где $\{g_n\}$ — произвольная последовательность ступенчатых функций, равномерно сходящаяся к g.

Из предложения 10.4 немедленно вытекают такие свойства интеграла от хороших функций:

Предложение 10.11. *Интеграл от хорошей функции обладает следующими свойствами:*

1) *Если f, g — хорошие функции на отрезке $[a;b]$ и $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ — константы, то*
$$\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x))\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx + \mu \int_a^b g(x)\,dx.$$

2) *Если f — хорошая функция на отрезке $[a;b]$, то*
$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant (b-a)\|f\|.$$

3) Если f, g — хорошие функции с вещественными значениями и $f(x) \geqslant g(x)$ для всех $x \in [a; b]$, то $\int_a^b f(x)\,dx \geqslant \int_a^b g(x)\,dx$.

4) Если f — хорошая функция на отрезке $[a; b]$, то

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Доказательство. Утверждения (1) и (2) очевидны. Утверждение (3) мы докажем лишь для случая, когда функции f и g кусочно непрерывны (в других ситуациях оно нам не понадобится). Ввиду (1), для этого достаточно показать, что интеграл от неотрицательной кусочно-непрерывной функции φ также будет неотрицателен. Из доказательства предложения 10.7 видно, что в этом случае ступенчатые функции g_n, аппроксимирующие φ, можно выбрать неотрицательными, так что интеграл от φ будет неотрицателен как предел последовательности неотрицательных чисел.

Утверждение (4) вытекает из предложения 10.4(3), поскольку при переходе к пределу нестрогие неравенства сохраняются. □

Покажем, наконец, что интеграл «коммутирует с равномерной сходимостью»:

Предложение 10.12. *Если последовательность функций f_n, хороших на отрезке $[a; b]$, равномерно сходится к хорошей функции f, то $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx$.*

Доказательство. По построению, интеграл является непрерывной функцией на $QC([a; b])$. □

Если заменить равномерную сходимость на поточечную, предложение 10.12 станет неверным; в качестве примера можно рассмотреть последовательность функций $g_n = nf_n$ на отрезке $[0; 1]$, где f_n — функция с рис. 9.4.

Теперь докажем основную теорему о связи дифференцирования и интегрирования.

Теорема 10.13 (формула Ньютона-Лейбница). *Пусть $f\colon [a; b] \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция. Определим функцию $F\colon (a; b) \to \mathbb{R}$ по формуле*

$$F(x) = \int_a^x f(x)\,dx.$$

Тогда для всякого $x \in (a; b)$ имеем $F'(x) = f(x)$.

Доказательство. Зафиксируем $x \in (a; b)$; для всякого $h > 0$ обозначим через $M(h)$ (соотв. $m(h)$) наибольшее (соотв. наименьшее) значение функции f на отрезке $[x; x+h]$; если $h < 0$, то через $M(h)$ и $m(h)$ обозначим наибольшее и наименьшее значение этой функции на $[x-h; x]$. Из непрерывности функции f в точке x легко следует (проверьте это самостоятельно), что $\lim_{h\to 0} M(h) = \lim_{h\to 0} m(h) = f(x)$.

Далее, поскольку $F(x+h) - F(x) = \int_x^{x+h} F(x)\,dx$, из предложения 10.11(3) вытекает, для всякого $h \neq 0$ имеют место неравенства

$$m(h) \leqslant \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \leqslant M(h).$$

Устремляя в этих неравенствах h к нулю, получаем наше утверждение. $\square$

Вот другой вариант формулы Ньютона-Лейбница:

Теорема 10.14. *Пусть $f\colon [a; b] \to \mathbb{R}$ — функция, непрерывная на некотором открытом множестве, содержащем $[a; b]$, и пусть функция $F\colon [a; b] \to \mathbb{R}$ обладает тем свойством, что $F'(x) = f(x)$ для всех $x \in (a; b)$. Тогда*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a). \tag{10.1}$$

Доказательство. Положим $\tilde{F}(x) = \int_a^x f(t)\,dt$. По самому определению $\tilde{F}$ имеем $\int_a^b f(x)\,dx = \tilde{F}(b) - \tilde{F}(a)$. Формула (10.1) будет теперь следовать из того, что разность $\tilde{F}(x) - F(x)$ не зависит от x, а это, в свою очередь, немедленно вытекает из следующей леммы:

Лемма 10.15. *Пусть непрерывная функция $f\colon [a; b] \to \mathbb{R}$ дифференцируема на $(a; b)$ и $f'(x) = 0$ для всех $x \in (a; b)$. Тогда функция f постоянна на $[a; b]$.*

Остается доказать лемму. Для этого заметим, что для всякого $x \in [a; b]$ имеем, в силу следствия 8.6, $f(x) = f(a) + f'(\xi)(x-a) = f(a)$. $\square$

Формула Ньютона–Лейбница открывает широкие возможности для явного нахождения интегралов от различных функций. Мы этим заниматься не будем, но приведем все же два следствия из нее, на которых такие вычисления основываются; первое из них (формула интегрирования по частям) вытекает из формулы для производной произведения, а второе (формула подстановки) — из формулы для производной сложной функции (8.3).

Предложение 10.16. *Пусть f и g — функции класса C^1 в некоторой окрестности отрезка $[a;b]$. Тогда*

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x)\Big|_{x=a}^{x=b} - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx. \tag{10.2}$$

Предложение 10.17. *Пусть φ — возрастающая функция класса C^1 в некоторой окрестности отрезка $[a;b]$ и f — функция класса C^1 на отрезке $[\varphi(a);\varphi(b)]$. Тогда*

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt. \tag{10.3}$$

Замечание 10.18. Изложенный здесь способ построения элементарной теории интегрирования принадлежит Коши. Для более серьезных приложений интеграла требуется более общая теория («интеграл Лебега»).