Лекция 11. Ряды

Рассмотрим пространство $C(X)$ ограниченных непрерывных функций на топологическом пространстве X. Как объяснялось в лекции 9, если его снабдить sup-нормой, то оно станет полным метрическим пространством.

Определение 11.1. *Рядом* называется формальная бесконечная сумма

$$f_1 + f_2 + \ldots + f_n + \ldots, \tag{11.1}$$

где все f_j лежат в $C(X)$. Для всякого $n \in \mathbb{N}$ положим $s_n = s_1 + \ldots + s_n$; эта сумма называется *n-ой частичной суммой.*

Ряд (11.1) называется *сходящимся*, если существует предел $\lim_{n\to\infty} s_n$. Этот предел называется *суммой ряда.*

Ряд $f_1 + f_2 + \ldots + f_n + \ldots$ записывают иногда также как $\sum_{i=1}^{\infty} f_i$.

Замечание 11.2. Пусть $n_0 \in \mathbb{N}$; ряд $f_1 + f_2 + \ldots$ сходится тогда и только тогда, когда сходится ряд $f_{n_0} + f_{n_0+1} + \ldots$. В самом деле, последовательности частичных сумм этих двух рядов отличаются друг от дружки сдвигом на константу.

Поскольку каждое число можно рассматривать как постоянную функцию на X, ряды, члены которых — просто числа, также охватываются определением 11.1; «sup-норма» числа — это, конечно, всего лишь его модуль. Можно было бы также считать f_n элементами любого «полного нормированного векторного пространства».

Критерий Коши для рядов переформулируется следующим образом:

Предложение 11.3. *Ряд $f_1 + \ldots + f_n + \ldots$ сходится тогда и только тогда, когда для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое $N \in \mathbb{N}$, что $\|f_n + \ldots + f_{n+m}\| < \varepsilon$ при всех $n > N$ и $m \geqslant 0$.*

Определение 11.4. Ряд $f_1 + f_2 + \ldots$ называется *абсолютно сходящимся*, если ряд из норм его членов $\|f_1\| + \|f_2\| + \ldots$ сходится.

Предложение 11.5. *Если ряд сходится абсолютно, то он сходится.*

Доказательство. В силу абсолютной сходимости для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое $N \in \mathbb{N}$, что $\|f_n\| + \ldots + \|f_{n+m}\| < \varepsilon$ при всех $n > N$ и $m \geqslant 0$. Из неравенства треугольника получаем, что тогда и подавно $\|f_n + \ldots + f_{n+m}\| < \varepsilon$, так что наш ряд сходится по предложению 11.3. $\square$

Заметим, что благодаря доказанному предложению фраза «ряд абсолютно сходится» перестает звучать двусмысленно. Заметим также, что ряд, абсолютно сходящийся по нашему определению, автоматически является равномерно сходящимся.

Абсолютно сходящиеся ряды обладают многими хорошими свойствами, позволяющими работать с ними почти как с обычными конечными суммами. Первый и основной пример тому — перестановка членов ряда.

Определение 11.6. Пусть $f_1 + f_2 + \ldots + f_n + \ldots$ — ряд. Его *перестановкой* называется ряд $f_{\varphi(1)} + f_{\varphi(2)} + \ldots + f_{\varphi(n)} + \ldots$, где $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ — взаимно однозначное отображение множества натуральных чисел на себя; мы будем называть такие функции *перестановками множества* $\mathbb{N}$.

Говоря более простым языком, перестановка членов ряда — это ряд, в котором те же самые функции записаны в другом порядке, при этом в новом ряде все члены старого встречаются, причем ровно по одному разу. Например, ряд

$$f_1 + f_3 + f_5 + f_2 + f_7 + f_9 + f_{11} + f_4 + f_{13} + f_{15} + f_{17} + f_6 + \ldots$$

(три нечетных, одно четное, три нечетных, одно четное,...) — перестановка ряда $f_1 + f_2 + f_3 + \ldots$.

Теорема 11.7. *Пусть $f_1 + \ldots + f_n + \ldots$ — абсолютно сходящийся ряд, и пусть φ — перестановка множества $\mathbb{N}$. Тогда ряд $f_{\varphi(1)} + f_{\varphi(2)} + \ldots + f_{\varphi(n)} + \ldots$ также абсолютно сходится, причем к той же сумме.*

Эта теорема вытекает из двух следующих лемм, представляющих и самостоятельный интерес.

Лемма 11.8. *Если $a_1 + \ldots + a_n + \ldots$ — ряд из неотрицательных вещественных чисел, то этот ряд сходится тогда и только тогда, когда множество сумм вида $a_S = \sum_{i \in S} a_i$, где S пробегает все конечные подмножества в $\mathbb{N}$, ограничено; если это условие выполняется, то сумма ряда равна верхней грани этого множества.*

Доказательство. Поскольку частичные суммы нашего ряда образуют монотонно возрастающую последовательность, он сходится тогда и только тогда, когда суммы вида ряд сходится тогда и только тогда, когда суммы вида $a_1 + \ldots + a_n = a_{\{1,2,\ldots,n\}}$ ограничены, причем сумма ряда в этом случае равна верхней грани таких сумм. Поскольку всякое конечное подмножество $S \subset \mathbb{N}$ содержится в некотором множестве вида $\{1, 2, \ldots, n\}$, и при этом $a_S \leqslant a_1 + \ldots + a_n$, множества $\{a_S\}_{S \subset \mathbb{N} \text{ конечно}}$ и $\{a_1 + \ldots + a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ограничены одновременно и их верхние грани совпадают. $\square$

Из доказанной леммы явствует, что ряд $\sum \|f_n\|$ сходится тогда же, когда сходится $\sum \|f_{\varphi(n)}\|$; стало быть, мы доказали первую половину теоремы: абсолютная сходимость ряда влечет абсолютную сходимость любой его перестановки.

Лемма 11.9. *Пусть $f_1 + f_2 + \ldots + f_n + \ldots$ — абсолютно сходящийся ряд в $C(X)$. Тогда $f \in C(X)$ является его суммой тогда и только тогда, когда выполнено следующее условие: для любого $\varepsilon > 0$ существует такое конечное множество $S \subset \mathbb{N}$, что для всякого конечного $T \supset S$, содержащегося в $\mathbb{N}$, имеем*

$$\left\| f - \sum_{i \in T} f_i \right\| < \varepsilon.$$

Доказательство. Пусть выполнено условие из леммы, и пусть $S \subset \mathbb{N}$ — конечное подмножество, соответствующее данному $\varepsilon > 0$. Если $N \in S$ — наибольший элемент, то при всех $n \geqslant N$ имеем $\{1, \ldots, n\} \supset S$, так что $\|f - (f_1 + \ldots + f_n)\| < \varepsilon$ и f — сумма ряда.

Обратно, пусть ряд абсолютно сходится к $f \in C(X)$. Тогда для данного $\varepsilon > 0$ существует такое $N \in \mathbb{N}$, что с одной стороны, $\|f - (f_1 + \ldots + f_N)\| < \varepsilon/2$, а с другой стороны (ввиду сходимости ряда $\|f_1\| + \|f_2\| + \ldots + \|f_n\| + \ldots$) имеем $\|f_n\| + \ldots + \|f_{n+m}\| < \varepsilon/2$ при всех $n > N$ и $m \geqslant 0$; из последнего неравенства следует, что если $U \subset \mathbb{N} \setminus \{1, \ldots, N\}$ — конечное множество, то $\sum_{j \in U} \|f_j\| < \varepsilon/2$. Покажем, что для данного ε можно положить $S = \{1, \ldots, N\}$. В самом деле, если $T \supset \{1, \ldots, N\}$ — произвольное конечное множество натуральных чисел, то

$$\left\| f - \sum_{i \in T} f_i \right\| \leqslant \|f - (f_1 + \ldots + f_N)\| + \left\| \sum_{j \in T \setminus \{1, \ldots, n\}} f_j \right\| <$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{j \in T \setminus \{1, \ldots, n\}} \|f_j\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Все доказано. $\square$

Лемма 11.9 выражает условие «f является суммой абсолютно сходящегося ряда $\sum f_i$» в виде, не меняющемся при перестановке членов ряда, так что тем самым доказана и вторая половина теоремы 11.7.

Условие абсолютной сходимости в этой теореме отбросить нельзя. Приведем

Пример 11.10. Рассмотрим ряд

$$1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots \qquad (11.2)$$

Этот ряд сходится: в самом деле, обозначая n-ю частичную сумму через s_n, имеем, очевидно, $s_1 \geqslant s_3 \geqslant s_5 \dots$ и $s_2 \leqslant s_4 \leqslant s_6 \dots$, и $s_{2m-1} \geqslant s_{2m}$ для всех $m \in \mathbb{N}$; значит, последовательности $\{s_{2m-1}\}_{m\in\mathbb{N}}$ и $\{s_{2m}\}_{m\in\mathbb{N}}$ сходятся, будучи монотонно возрастающими и ограниченными, а поскольку их разность s_{2m} стремится к нулю, эти два предела равны и являются пределом частичных сумм нашего ряда. (Приведенное рассуждение годится и в общем случае: ряд из вещественных чисел, абсолютные величины которых монотонно убывают и стремятся к нулю, а знаки чередуются, обязательно сходится; это утверждение называется признаком Лейбница.) Абсолютная сходимость ряда (11.2) места не имеет, так как $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{n}} \geqslant \frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}$. Заметим, что ряд, составленный из положительных членов нашего ряда, расходится, а все отрицательные члены нашего ряда по модулю меньше единицы. Теперь переставим ряд так: сначала поставим только положительные члены в таком количестве, чтобы их сумма была больше 11, затем поставим $(-\frac{1}{\sqrt{2}})$ — частичная сумма будет больше 10, затем добавим столько следующих положительных членов, чтобы частичная сумма стала больше 21, затем $(-\frac{1}{\sqrt{4}})$ — частичная сумма будет больше 20, затем столько следующих положительных членов, чтоб частичная сумма стала больше 31, затем $(-\frac{1}{\sqrt{6}})$, и т. д. Легко видеть, что частичные суммы полученного ряда неограниченны, так что переставленный ряд расходится.

(Нетрудно показать, что, переставляя члены неабсолютно сходящегося ряда из вещественных чисел, можно добиться, чтобы последовательность частичных сумм имела любые наперед заданные верхний и нижний пределы.)

Следующее предложение является частным случаем «теоремы Фубини» из теории меры.

Предложение 11.11. *Пусть $\{f_{mn}\}_{m,n\in\mathbb{N}}$ — семейство элементов пространства $C(X)$, занумерованное парами натуральных чисел. Предположим, что рад $\sum_{m,n\in\mathbb{N}} f_{mn}$ абсолютно сходится, и пусть f — его* *сумма (ввиду предложения 11.7 ни абсолютная сходимость, ни f не зависят от того, в каком порядке пронумеровать пары $(m; n)$). Тогда для каждого $m \in \mathbb{N}$ абсолютно сходятся ряды $\sum_{i\in\mathbb{N}} f_{mi}$ (обозначим его сумму h_m) и $\sum_{i\in\mathbb{N}} f_{im}$ (обозначим его сумму v_m). Далее, ряды $\sum_m h_m$ и $\sum_m v_m$ оба абсолютно сходятся к $f = \sum_{m,n\in\mathbb{N}} f_{mn}$.*

Иными словами, сумму элементов абсолютно сходящейся бесконечной матрицы можно подсчитать, найдя суммы каждой строки (или каждого столбца) и сложив все эти суммы.

Доказательство. Пусть $\Sigma = \sum_{i,j} \|f_{ij}\|$. Для всякого m имеем $\sum_i \|f_{mi}\| \leqslant \Sigma$, $\sum_i \|f_{im}\| \leqslant \Sigma$ (так что абсолютно сходятся все строки и все столбцы); так как $\|h_m\| \leqslant \sum_i \|f_{mi}\|$, то $\sum_m \|h_m\| \leqslant \Sigma$, и ряд $\sum h_m$ (а также, естественно, $\sum v_m$) также абсолютно сходится.

Докажем теперь, что $\sum h_m = f$ (доказательство для $\sum v_m$ аналогично). Для этого зададимся произвольным $\varepsilon > 0$ и найдем по нему $N \in \mathbb{N}$, обладающее тем свойством, что если $S \supset \{1, \ldots, N\} \times \{1, \ldots, N\}$ — конечное подмножество в $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, то $\left\|f - \sum_{(i,j)\in S} f_{ij}\right\| < \varepsilon/2$ и $\left|\Sigma - \sum_{(i,j)\in S} \|f_{ij}\|\right| < \varepsilon/2$ (первое возможно ввиду леммы 11.9, второе — ввиду определения Σ). Покажем, что при всяком $n \geqslant N$ имеем $\|f - (h_1 + \ldots + h_n)\| \leqslant \varepsilon$.

В самом деле,

$$\|f-(h_1+\ldots+h_n)\| \leqslant \left\|f - \sum_{i,j\leqslant n} f_{ij}\right\| + \left\|(h_1 + \ldots + h_n) - \sum_{i,j\leqslant n} f_{ij}\right\|. \quad (11.3)$$

Первое слагаемое в правой части меньше $\varepsilon/2$ ввиду нашего выбора n. Чтобы оценить второе слагаемое, заметим, что вообще для всяких j и m имеем

$$\|h_j - \sum_{k=1}^{n} f_{jk}\| = \|\sum_{k=n+1}^{\infty} f_{jk}\| \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} \|f_{jk}\|.$$

Следовательно,

$$\left\|(h_1 + \ldots + h_n) - \sum_{i,j\leqslant n} f_{ij}\right\| \leqslant \left\|h_1 - \sum_{k=1}^{n} f_{1k}\right\| + \ldots + \left\|h_n - \sum_{k=1}^{n} f_{nk}\right\| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} (\|f_{1k}\| + \ldots + \|f_{nk}\|).$$

Сумма ряда в правой части является верхней гранью конечных сумм чисел $\|f_{pq}\|$, где $p \leqslant n$, $q > n$. По нашему выбору n каждая такая сумма меньше $\varepsilon/2$, так что их верхняя грань не превосходит $\varepsilon/2$. Стало быть, правая часть в 11.3 меньше ε. Предложение доказано. $\square$

Следствие 11.12. *В условиях предложения 11.11, если двойной ряд $\sum f_{mn}$ абсолютно сходится, то суммы рядов $\sum h_m$ и $\sum v_m$ совпадают.*

Следующее хорошее свойство абсолютно сходящихся рядов относится к умножению рядов. Мы будем пользоваться неравенством $\|fg\| \leqslant \|f\| \cdot \|g\|$ (предложение 9.3(4)).

Начнем, как водится, с мотивировок. Предположим, что у нас имеются два «степенных ряда» вида $a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots$ и $b_0+b_1x+b_2x^2+\ldots$. Если их перемножить и привести подобные члены (чисто формально), то получится ряд вида

$$a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)x^2 + \ldots \\ + (a_0b_n + a_1b_{n-1} + \ldots + a_nb_0)x^n + \ldots . \quad (11.4)$$

Обобщая (11.4) на произвольные ряды, получаем такое

Определение 11.13. Пусть $f_1+f_2+\ldots+f_n+\ldots$ и $g_1+g_2+\ldots+g_n+\ldots$ — два ряда. Их *произведением* называется ряд $h_1 + h_1 + \ldots + h_n + \ldots$, где $h_n = f_0g_n + f_1g_{n-1} + \ldots + f_ng_0$.

Предложение 11.14. *Пусть $f_1+f_2+\ldots+f_n+\ldots$ и $g_1+g_2+\ldots+g_n+\ldots$ — два абсолютно сходящихся ряда, и пусть $h_1 + h_1 + \ldots + h_n + \ldots$ — их произведение. Тогда ряд $\sum h_i$ также абсолютно сходится, причем его сумма равна произведению сумм рядов $\sum f_i$ и $\sum g_j$.*

Доказательство. Поскольку ряды $\sum f_i$ и $\sum g_i$ абсолютно сходятся, всякая конечная сумма вида $\sum \|f_ig_j\|$ не превосходит $\sum \|f_i\| \cdot \|g_j\|$, что, в свою очередь, не превосходит $(\sum_{i=1}^{\infty} \|f_i\|) \cdot \left(\sum_{j=1}^{\infty} \|g_j\|\right)$; стало быть, двойной ряд $\sum f_ig_j$ абсолютно сходится. Если упорядочить его члены так же, как в доказательстве предложения 11.11, то в число частичных сумм войдут произведения

$$\sum_{i,j=1}^{n} f_ig_j = \left(\sum_{i=1}^{\infty} f_i\right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{\infty} g_j\right);$$

поэтому сумма двойного ряда $\sum f_ig_j$равна произведению сумм рядов $\sum f_i$ и $\sum g_j$. Если, с другой стороны, упорядочить члены этого двойного ряда «по диагоналям», так, чтобы сначала перечислялись все слагаемые, для которых $i+j=2$, затем все слагаемые, у которых $i+j=3$, и т. д., то в число частичных сумм войдут все частичные суммы ряда $\sum h_i$, так что сумма двойного ряда $\sum f_i g_j$ равна сумме ряда $\sum h_k$. Все доказано. $\square$

Пример 11.15. Если ни один из перемножаемых рядов не является абсолютно сходящимся, предложение 11.14 перестает быть верным. Пусть, скажем, $\sum f_i$ и $\sum g_i$ — один и тот же знакомый нам ряд $1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\dots$. Тогда $n+1$-й член ряда-произведения равен

$$\pm\left(\frac{1}{\sqrt{1}\cdot\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{n-1}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{n}\cdot\sqrt{1}}\right),$$

то есть сумме n слагаемых одного знака, каждое из которых по модулю не меньше, чем $\frac{1}{\sqrt{(n+1)/2}\cdot\sqrt{(n+1)/2}}=2/(n+1)$. Стало быть, общий член к нулю не стремится и произведение рядов расходится.