Лекция 12. Аналитические функции

Эту лекцию мы посвятим описанию класса функций, ведущих себя «наилучшим возможным образом».

Определение 12.1. Пусть $U \subset \mathbb{R}$ (соответственно $U \subset \mathbb{C}$) — открытое множество. Функция $f\colon U \to \mathbb{C}$ называется *вещественно аналитической* (соответственно *комплексно аналитической*), если локально она представима в виде суммы степенного ряда: для всякого $c \in U$ существует степенной ряд вида

$$a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + \ldots + a_n(x-c)^n + \ldots, \tag{12.1}$$

сходящийся к $f(x)$ на множестве вида $\{x \mid |x-c| \leqslant r\}$ для некоторого $r > 0$ (подразумевается, что r, в частности, достаточно мало, чтобы это множество содержалось в U).

Пример 12.2. Всякий многочлен является аналитической функцией, причем ряд (12.1) сводится в этом случае к конечной сумме: легко видеть, что для всякого многочлена P степени n и всякого числа c верно тождество

$$P(x) = P(c) + P'(c)(x-c) + \frac{P''(c)}{2!}(x-c)^2 + \ldots + \frac{P^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n. \tag{12.2}$$

Для многочленов от вещественного переменного это немедленно следует из формулы Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа; кроме того, если понимать производную от многочлена формально, тождество (12.2) нетрудно доказать чисто алгебраически для многочленов над любым полем характеристики 0.

Пример 12.3. Функция $f(x) = 1/x$ аналитична на $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. В самом деле, для всякого $c \neq 0$ имеем разложение

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{c} - \frac{1}{c^2}(x-c) + \frac{1}{c^3}(x-c)^2 - \frac{1}{c^4}(x-c)^3 + \cdots.$$

Этот ряд, как легко видеть, сходится на множестве $\{x \mid |x-c| < |c|\}$. В отличие от предыдущего примера, в данном случае не существует степенного ряда, годящегося для всей области определения функции.

Многое из дальнейшего формулируется и доказывается совершенно одинаково для вещественно- и комплексно-аналитических функций. Если ниже речь пойдет просто об аналитической функции, это будет означать, что утверждение верно (или рассуждение применимо) в обоих этих случаях. А пока давайте разберемся со сходимостью степенного ряда (12.1).

Предложение-определение 12.4. Пусть $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — ограниченная сверху последовательность действительных чисел. Ее *верхним пределом* называется число $\overline{\lim}\, x_n = \inf\limits_n \sup\limits_{m\geqslant n} x_m$. Другое обозначение для верхнего предела: $\limsup x_n$. У всякой ограниченной сверху последовательности существует верхний предел, причем он является наибольшей предельной точкой этой последовательности.

(Аналогично, *нижним пределом* ограниченной снизу последовательности $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ называется $\underline{\lim}\, x_n = \sup\limits_n \inf\limits_{m\geqslant n} x_m$. Другое обозначение для нижнего предела: $\liminf x_n$.)

Доказательство предложения 12.4 мы опускаем: на этом этапе слушатели в состоянии провести его самостоятельно.

В формулировке следующего предложения мы будем считать, что если последовательность $\{x_n\}$ не является ограниченной сверху, $*\,\overline{\lim}\, x_n = +\infty$.

Предложение 12.5 (О. Коши–Ж. Адамар). *Рассмотрим ряд* (12.1) *и положим* $R = 1\big/\overline{\lim}\,\sqrt[n]{|a_n|}$ *(если в знаменателе нуль, полагаем* $R = +\infty$*, если в знаменателе* $+\infty$*, полагаем* $R = 0$*). Тогда для всякого положительного* $r < R$ *ряд* (12.1) *сходится абсолютно по* sup-*норме (стало быть, и равномерно) на множестве вида* $\{x \mid |x-c| \leqslant r\}$. *Напротив, при* $|x-c| > R$ *этот ряд расходится.*

Число R, введенное в формулировке предложения, называется *радиусом сходимости* степенного ряда, а само это предложение называется еще «формулой Коши-Адамара». Множество $\{x \mid |x-c| < R\}$ называется *кругом сходимости* ряда (12.1) (особенно когда речь идет о функциях комплексного переменного).

Доказательство. Сосредоточимся на случае $R < +\infty$, предоставив остальное читателю. Пусть $r < R$. Тогда $\overline{\lim}\,\sqrt[n]{|a_n|} < 1/r$. Следовательно, существует такое число $\lambda > r$, что для всех n, кроме, быть может, конечного числа, выполнено неравенство $|a_n| < 1/\lambda^n$. На множестве $\{x \mid |x-c| \leqslant r\}$ имеем $\|a_n(x-c)^n\| = |a_n|r^n$, так что для всех n, кроме конечного числа, имеем $\|a_n(x-c)^n\| < (r/\lambda)^n$. Следовательно, ряд $\sum \|a_n(x-c)^n\|$ сходится, поскольку его частичные суммы оцениваются сверху частичными суммами бесконечно убывающей геометрической прогрессии $\sum (r/\lambda)^n$ (плюс константа). Тем самым абсолютная сходимость установлена.

Пусть теперь $|x-c| > R$. Тогда $\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|} > 1/|x-c|$, так что для бесконечно большого числа номеров $n \in \mathbb{N}$ имеем $|a_n| > 1/|x-c|^n$ и $|a_n(x-c)^n| > 1$. Значит, общий член ряда не стремится к нулю и ряд расходится. $\square$

Следствие 12.6. *Степенной ряд* (12.1) *имеет положительный радиус сходимости тогда и только тогда, когда существуют такие числа $C, r > 0$, что $|a_n| \leqslant Cr^n$ для всех $n > N$ (короче можно сказать: тогда и только тогда, когда $|a_n| = O(r^n)$ для некоторого $r > 0$).* $\square$

Замечание 12.7. В точках, расположенных на границе круга сходимости, ряд (12.1) может и сходится, и расходиться. Например, ряд $\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^i x^i/i$ сходится при $x = 1$ и расходится при $x = -1$.

Итак, всякая аналитическая функция локально представима в виде суммы степенного ряда, сходящегося равномерно на любом компактном подмножестве своего круга сходимости. Стало быть,

Следствие 12.8. *Всякая аналитическая функция непрерывна.*

Теперь покажем, что всякая функция, заданная как сумма степенного ряда, аналитична внутри его круга сходимости. Тем самым мы сразу получим большое число примеров аналитических функций.

Предложение 12.9. *Пусть*

$$a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + \ldots + a_n(x-c)^n + \ldots \tag{12.3}$$

— степенной ряд с радиусом сходимости $R > 0$. Тогда функция f, определенная на множестве $U = \{x \mid |x-c| < R\}$ по формуле $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-c)^k$, является аналитической на U.

Доказательство. Не ограничивая общности, можно считать, что $c = 0$, что мы и предположим до конца доказательства. Нам надо доказать, что для всякого p, удовлетворяющего условию $|p| < R$, существует степенной ряд $\sum_{l=0}^{\infty} b_l(x-p)^l$ и число $r > 0$ такие, что этот ряд равномерно сходится к $f(x)$ на множестве $D_r = \{x \mid |x-p| \leqslant r\}$.

Для этого выберем положительное число $r < R - |p|$ и рассмотрим двойной ряд (см. предложение 11.11)

$$\begin{aligned}
&a_0 + \\
&a_1 p + a_1(x-p) + \\
&a_2 p^2 + 2a_2 p(x-p) + a_2(x-p)^2 + \\
&\dots \\
&a_n p^n + n a_n p^{n-1}(x-p) + \frac{n(n-1)}{2} a_n p^{n-2}(x-p)^2 + \ldots + a_n(x-p)^n + \ldots
\end{aligned} \tag{12.4}$$

(в каждом слагаемом вида $a_m x^m$ мы заменили x на $p+(x-p)$ и раскрыли по биному Ньютона). «Двойной ряд», стоящий в правой части этого равенства, абсолютно сходится по sup-норме на множестве D_r. В самом деле, на D_r имеем $\|b(x-p)^n\| = |b|r^n$, так что сумма sup-норм членов двойного ряда равна

$$\begin{aligned}
&|a_0| + \\
&\quad |a_1| \cdot |p| + a_1 r + \\
&\quad |a_2| \cdot |p|^2 + 2|a_2| \cdot |p| r + |a_2| r^2 + \\
&\quad \dots \\
&\quad |a_n| \cdot |p|^n + n|a_n| \cdot |p|^{n-1} r + \frac{n(n-1)}{2} |a_n| \cdot |p|^{n-2} r^2 + \ldots + |a_n| r^n + \ldots \\
&= |a_0| + |a_1|(|p| + r) + |a_2|(|p| + r)^2 + \ldots + |a_n|(|p| + r)^n + \ldots .
\end{aligned}$$

Поскольку радиусы сходимости рядов $\sum a_n x^n$ и $\sum |a_n| x^n$ совпадают в силу формулы Коши-Адамара, и при этом $|p| + r < R$ по выбору r, сумма в правой части выписанного равенства конечна, и абсолютная сходимость двойного ряда 12.4 доказана. Теперь из предложения 11.11 следует, что сумма этого двойного ряда равна сумме рядов, составленных из сумм строк и сумм столбцов (и что все участвующие в игре ряды также абсолютно сходятся по sup-норме на D_r). Ряд, составленный из сумм строк, есть по построению $\sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m$, и он сходится к $f(x)$. Ряд, составленный из сумм столбцов, можно записать как $\sum_{m=0}^{\infty} b_m (x-p)^m$, где b_j — некоторые числа. Из сказанного вытекает, что этот ряд также абсолютно по sup-норме сходится к $f(x)$, что и требовалось. $\square$

Замечание 12.10. Из доказательства видно, что радиус сходимости построенного нами ряда $\sum b_m (x-p)^m$ не меньше, чем $R - |p|$. Реально этот радиус может быть и больше (пример: $f(x) = 1/(1+x)$, $c=0$, $p=1/2$). В этом случае окажется, что функция, изначально определенная с помощью разложения (12.3) в круге сходимости степенного ряда (12.3), на самом деле определена в большем открытом множестве. Как говорят, возможно аналитическое продолжение f за пределы круга сходимости.

Конструкция из доказательства предложения 12.9 позволяет, как мы сейчас увидим, продифференцировать любую аналитическую функцию. Чтобы результат был применим и в комплексном случае, дадим такое

Определение 12.11. Пусть $U \subset \mathbb{C}$ — открытое подмножество и $p \in U$. Функция $f\colon U \to \mathbb{C}$ называется *дифференцируемой в комплексном смысле* в точке p, если существует предел

$$\lim_{x\to p} \frac{f(x)-f(p)}{x-p}.$$

Если этот предел существует, он называется *производной* функции f в точке p. Если функция f дифференцируема во всех точках $p \in U$, она называется *голоморфной*[4] на множестве U.

Легко видеть, например, что для всякого $n \in \mathbb{N}$ степенная функция $f(z) = z^n$ является голоморфной, причем $f'(z) = nz^{n-1}$, как и в вещественном случае.

Предложение 12.12. *Пусть U — открытое подмножество в $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, $c \in U$ и $f\colon U \to \mathbb{C}$ — аналитическая функция. Тогда она дифференцируема на U, если $U \subset \mathbb{R}$ и голоморфна на U, если $U \subset \mathbb{C}$; ее производная $f'\colon U \to \mathbb{C}$ также аналитична. Более того, если в окрестности точки $c \in U$ функция f представляется в виде* (12.1), *то f' представляется в окрестности этой точки в виде ряда, полученного почленным дифференцированием ряда* (12.1), *причем этот ряд сходится в круге сходимости ряда* (12.1).

Доказательство. Пусть в окрестности точки c функция f представима в виде суммы ряда (12.1). Мы будем пользоваться обозначениями и предположениями из доказательства предложения 12.9 (в частности, будем считать, что $c=0$). Из вида двойного ряда (12.4) ясно, что в разложении $f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m (x-p)^m$ имеем $b_0 = \sum_{i=0}^{\infty} a_i p^i = f(p)$ (что и не удивительно) и $b_1 = \sum_{i=1}^{\infty} i a_i p^{i-1}$. Очевидно, ряд $\sum_{i=1}^{\infty} b_i (x-p)^{i-1}$

[4] Называть голоморфные функции просто «дифференцируемыми» не принято.

абсолютно сходится на D_r к некоторой непрерывной (на самом деле аналитической, но в данный момент это не важно) функции $g(x)$. Поскольку при $x \neq p$ имеем $g(x) = (f(x) - f(p))/(x - p)$, получаем, что

$$\lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} = \lim_{x \to p} g(x) = g(p) = b_1.$$

Значит, функция f дифференцируема (в комплексном смысле, если f комплексно-аналитична) в точке p, и при этом

$$f'(p) = \sum_{i=1}^{\infty} i a_i p^{i-1}. \tag{12.5}$$

Поскольку разложение (12.5) имеет место для всякой точки p, удовлетворяющей условию $|p| < R$, мы получаем, что функция f' аналитична. Наконец, правая часть равенства (12.5) получается почленным дифференцированием из степенного ряда для f. Все доказано. □

Замечание 12.13. Из формулы Коши-Адамара нетрудно вывести, что радиус сходимости ряда для f' совпадает с радиусом сходимости ряда для f.

Следствие 12.14. *Пусть U — открытое подмножество в $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, $c \in U$, $f \colon U \to \mathbb{C}$ — аналитическая функция, и пусть в окрестности c имеет место разложение*

$$f(x) = a_0 + a_1(x - c) + a_2(x - c)^2 + \ldots + a_n(x - c)^n + \cdots. \tag{12.6}$$

Тогда для всех $n \in \mathbb{N}$ имеем $a_n = f^{(n)}(c)/n!$. Иными словами, ряд Тейлора аналитической функции в любой точке с ее области определения сходится к ней в некоторой окрестности этой точки.

Доказательство. Ввиду предложения 12.12 равенство (12.6) можно сколько угодно раз почленно дифференцировать. Положим $x = c$ — найдем a_0, продифференцируем и положим $x = c$ — найдем a_1, и т. д. □

Следствие 12.15. *Всякая вещественно-аналитическая функция принадлежит классу C^∞.* □

Замечание 12.16. Утверждение, обратное к следствию 12.15, неверно: существуют (и играют важную роль в некоторых вопросах) бесконечно дифференцируемые, но не аналитические функции вещественного переменного. Например, нетрудно показать, что функция, определенная по формуле

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x > 0; \\ 0, & x \leqslant 0, \end{cases}$$

бесконечно дифференцируема на всем $\mathbb{R}$, причем все ее производные в нуле равны нулю. Значит, f не может быть аналитичной в нуле: ввиду следствия 12.14 степенной ряд вида $\sum a_i x^i$, сходящийся к f, должен быть ее рядом Тейлора в нуле и как таковой должен состоять из одних нулей. Между тем ни в какой окрестности нуля наша функция тождественным нулем не является.

С другой стороны, с функциями комплексного переменного ситуация прямо противоположна: всякая функция, голоморфная на открытом подмножестве $U \subset \mathbb{C}$, с неизбежностью будет аналитична. Для доказательства этого важного факта нужна дополнительная техника, которой мы пока не владеем.

Наша следующая задача — показать, что класс аналитических функций замкнут относительно всех разумных операций.

Для начала — совсем простое

Предложение 12.17. *Сумма и произведение аналитических функций аналитичны.*

Доказательство. Достаточно показать, что, если $f, g\colon U \to \mathbb{C}$ — функции, заданные в некоторой окрестности точки $c \in U$ рядами $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-c)^k$ и $\sum_{k=0}^{\infty} b_k(x-c)^k$, то функции $f+g$ и fg задаются в некоторой окрестности этой точки степенными рядами, являющимися суммой и произведением этих рядов соответственно. Утверждение про сумму немедленно следует из предложения 11.11, а утверждение про произведение — из предложения 11.14.

Заметим для дальнейшего, что, если радиусы сходимости рядов для f и g равны R_1 и R_2 соответственно, то радиус сходимости рядов для $f+g$ и fg не меньше, чем $\min(R_1, R_2)$. □

Композиция аналитических функций также аналитична:

Предложение 12.18. *Пусть $U \subset \mathbb{C}$ — открытое подмножество, $f\colon U \to \mathbb{C}$ — аналитическая функция, $f(U) \subset V$, где $V \subset \mathbb{C}$ — открытое множество, $g\colon V \to \mathbb{C}$ — аналитическая функция. Тогда функция $g \circ f\colon U \to \mathbb{C}$ также аналитична. Это утверждение верно и в тех* *случаях, когда U (или как U, так и V) является открытым подмножеством в $\mathbb{R}$, а не $\mathbb{C}$.*

Доказательство. Доказательство проходит одинаково во всех трех случаях, так что мы не будем их различать. Пусть $p \in U$,

$$f(x) = a_0 + a_1(x-p) + a_2(x-p)^2 + \cdots \tag{12.7}$$

в некоторой окрестности точки p. Тогда

$$g(y) = b_0 + b_1(y-a_0) + b_2(y-a_0)^2 + \cdots \tag{12.8}$$

в окрестности точки $f(p) = a_0$. В ряд (12.8) подставим вместо y (формально) правую часть равенства (12.7) (то есть $f(x)$). Поскольку ряд для $y - a_0$ не имеет свободного члена, в полученном выражении можно (опять же формально) раскрыть все внешние скобки (не трогая $(x-p)$) и привести подобные члены, в результате чего получится степенной ряд относительно $x - p$ вида

$$c_0 + c_1(x-p) + c_2(x-p)^2 + c_3(x-p)^3 + \cdots \tag{12.9}$$

где $c_0 = b_0$, $c_1 = b_1a_1$, $c_2 = b_1a_2 + b_2a_1^2$, $c_3 = b_1a_3 + 2b_2a_1a_2 + b_3a_1^3 \ldots$. Для доказательства аналитичности функции $g \circ f$ мы покажем, что в некоторой окрестности точки p этот ряд к ней сходится.

В самом деле, пусть R — радиус сходимости ряда (12.8). Замечание в конце доказательства предложения 12.17 показывает, что для любого $n \in \mathbb{N}$ радиус сходимости ряда

$$h_{n1}(x-p) + h_{n2}(x-p)^2 + \ldots + h_{nm}(x-p)^m + \cdots,$$

полученного формальным раскрытием внешних скобок (не трогая $(x - p)$) и приведением подобных из $(a_1(x-p) + a_2(x-p)^2 + a_3(x-p)^3 + \cdots)^n$, не меньше R, и что этот ряд сходится к $(f(x) - a_0)^n$. Ясно, что ненулевые члены в этом ряде начинаются с $h_{nn}(x-p)^n$. Заметим также, что всякий h_{ij} выражается через $a_0, a_1, a_2, \ldots$ как многочлен: $h_{ij} = P_{ij}(a_0, a_1, a_2, \ldots)$, причем коэффициенты многочленов P_{ij} являются целыми неотрицательными числами и не зависят от $a_0, a_1, a_2, \ldots$.

Рассмотрим теперь «двойной ряд»

$$\begin{aligned}
b_0 + {} & \\
& b_1h_{11}(x-p) + b_1h_{12}(x-p)^2 + b_1h_{13}(x-p)^3 + b_1h_{14}(x-p)^4 + \ldots \\
& b_2h_{21}(x-p) + b_2h_{22}(x-p)^2 + b_2h_{24}(x-p)^4 + b_2h_{24}(x-p)^4 + \ldots \\
& b_3h_{31}(x-p) + b_3h_{32}(x-p)^2 + b_3h_{33}(x-p)^3 + b_3h_{34}(x-p)^4 + \ldots.
\end{aligned} \tag{12.10}$$

Из построения ясно, что ряд, полученный в результате сложения сумм каждой строки, сходится к $g(f(x))$ при всех x, достаточно близких к p, а ряд, полученный в результате сложения сумм каждого столбца (поскольку, как мы отмечали выше, $h_{ij} = 0$ при $j < i$, все эти суммы конечны), совпадает с рядом (12.9). Стало быть, ввиду предложения 11.11 все будет доказано, если мы покажем, что двойной ряд 12.10 сходится абсолютно в некоторой окрестности точки p.

Чтобы сделать это, рассмотрим вспомогательные функции $\tilde{f}(z) = \sum_{i=0}^{\infty} |a_i| z^i$ и $\tilde{g}(y) = \sum_{i=0}^{\infty} |b_i|(y - |a_0|)^i$; поскольку радиусы сходимости рядов, стоящих в правых частях этих равенств, совпадают с радиусами сходимости рядов (12.7) и (12.8) соответственно (и тем самым положительны), функции $\tilde{f}$ и $\tilde{g}$ определены корректно как аналитические функции в некоторых окрестностях точек 0 и $|a_0|$. Обозначим через R радиус сходимости ряда (12.8) (он же — радиус сходимости ряда для $\tilde{g}$). Поскольку аналитические функции непрерывны, существует такое $r > 0$, что $|\tilde{f}(z) - |a_0|| < R$, как только $|z| \leqslant r$. Утверждается, что двойной ряд (12.10) абсолютно сходится на множестве $\{x \mid |x - p| \leqslant R\}$.

В самом деле, на этом множестве имеем $\|b_i h_{ij}(x-p)^j\| = |b_i| \cdot |h_{ij}| r^j$; поскольку $h_{ij} = P_{ij}(a_0, a_1, a_2, \ldots)$ и коэффициенты многочленов P_{ij} неотрицательны, имеем $|h_{ij}| \leqslant P_{ij}(|a_0|, |a_1|, |a_2|, \ldots) = \tilde{h}_{ij}$. Однако же двойной ряд с положительными членами

$$
\begin{aligned}
&|b|_0 + \\
&\qquad |b|_1\tilde{h}_{11}r + |b|_1\tilde{h}_{12}r^2 + |b|_1\tilde{h}_{13}r^3 + |b|_1\tilde{h}_{14}r^4 + \ldots \\
&\qquad |b|_2\tilde{h}_{21}r + |b|_2\tilde{h}_{22}r^2 + |b|_2\tilde{h}_{24}r^4 + |b|_2\tilde{h}_{24}r^4 + \ldots \\
&\qquad |b|_3\tilde{h}_{31}r + |b|_3\tilde{h}_{32}r^2 + |b|_3\tilde{h}_{33}r^3 + |b|_3\tilde{h}_{34}r^4 + \ldots .
\end{aligned}
$$

очевидным образом сходится: его строка номер i сходится к $|b_i|(\tilde{f}(r))^i$, а сумма строк сходится к $\sum b_i(\tilde{f}(r))^i = \tilde{f}(\tilde{g}(r))$. Стало быть, мы можем применить предложение 11.11, на чем доказательство и завершается. □

Теперь докажем, что функция, обратная к аналитической, также аналитична. Разумеется, при этом необходимо потребовать, чтобы исходная функция была взаимно однозначна — иначе обратная функция не определена, — однако же этого недостаточно: функция $f(x) = x^3$ аналитична и взаимно однозначна на всем $\mathbb{R}$, но обратная к ней $g(x) = \sqrt[3]{x}$ даже не дифференцируема в нуле. Чтобы получить корректную формулировку, надо потребовать, чтобы производная не обращалась в нуль:

Предложение 12.19. *Пусть $U \subset \mathbb{R}$ (соотв. $U \subset \mathbb{C}$) — открытое подмножество, $f\colon U \to \mathbb{R}$ (соотв. $f\colon U \to \mathbb{C}$) — аналитическая функция, $p \in U$, $f'(p) \neq 0$ Тогда существует такое открытое подмножество $W \ni f(p)$, что отображение $f\colon f^{-1}(W) \to W$ взаимно однозначно, а обратная функция $f^{-1}\colon W \to f^{-1}(W)$ аналитична.*

Начнем с того, что установим аналитичность функции, обратной у к функции $y = x^2$.

Лемма 12.20. *Функция $f(x) = \sqrt{x}$ аналитична на $(0; +\infty)$.*

Доказательство леммы. Пусть $a \in (0; +\infty)$. Поскольку, как известно,[5] k-я производная функции $y = \sqrt{x}$ — это функция $y = (1/2)(1/2-1)\dots(1/2-k+1)x^{-1/2-k}$, из формулы Тейлора (теорема 8.8) вытекает, что

$$\sqrt{x} = \sqrt{a} + \frac{1}{2}a^{1/2-1}(x-a) + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2!}a^{1/2-2}(x-a)^2 + \dots + \\ + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)\dots(\frac{1}{2}-n+1)}{n!}a^{1/2-n}(x-a)^n + R_{n+1}(x),$$

где

$$R_{n+1}(x) = \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)\dots(\frac{1}{2}-n)}{(n+1)!}\xi^{1/2-n-1}(x-a)^{n+1}$$

(ξ лежит между a и x).

Поскольку, очевидно, первый множитель в выражении для $R_{n+1}(x)$ по модулю не превосходит единицы, имеем

$$|R_{n+1}(x)| \leqslant \sqrt{|\xi|}\left(\frac{|x-a|}{|\xi|}\right)^{n+1} \leqslant \sqrt{\max(x,a)}\left(\frac{|x-a|}{\min(x,a)}\right)^{n+1}$$

При $|x-a| < a/3$ имеем $|x-a|/\min(x,a) < 1/2$, откуда $\lim_{n\to\infty} R_{n+1}(x) = 0$. Стало быть, в этой окрестности точки a функция $y = \sqrt{x}$ представляется в виде степенного ряда, что и доказывает ее аналитичность. □

[5]Вот как это можно вывести «из первооснов». Существование и единственность корня степени q (где $q \in \mathbb{N}$) из положительного числа вытекает из теоремы о промежуточном значении и монотонности функции $y = x^q$. Далее прямым вычислением получаем формулу для производной функции $y = x^{1/q}$; формула для производной функции $y = x^{p/q}$ получится, если представить эту функцию в виде композиции корня степени q и возведения в степень p.

(Наша оценка весьма груба: на самом деле радиус сходимости степенного ряда для $\sqrt{x}$ в окрестности точки a равен a.)

Доказательство теоремы. Поскольку взятие композиции с линейными функциями вида $x \mapsto kx + b$, где $k \neq 0$, не влияет ни на аналитичность, ни на взаимную однозначность, ни на необращение производной в нуль, можно, не ограничивая общности, считать, что $p = 0$, $f(p) = 0$, $f'(p) = 1$. Запишем разложение f в окрестности нуля в виде $f(x) = x - \sum_{i=2}^{\infty} a_i x^i$ (вскоре мы увидим, зачем нужен знак минус), и будем искать обратную функцию в виде $g(y) = \sum_{i=1}^{\infty} b_i y^i$. Нам надо подобрать коэффициенты b_i таким образом, чтобы после формальной подстановки $x = g(y)$ получился ряд $f(g(y)) = y$.

Лемма 12.21. *Имеем $b_1 = 1$; далее, существуют такие не зависящие от коэффициентов $\{a_i\}$ многочлены $P_2, P_3, \ldots$ с положительными коэффициентами, что $b_n = P_n(a_2, a_3, \ldots, a_n)$ для всех $n \geqslant 2$.*

Доказательство леммы. В формальном ряде $x - \sum_{i=2}^{\infty} a_i x^i$ подставим $x = \sum_{i=1}^{\infty} b_i y^i$, раскроем скобки и приведем подобные; обозначим получившийся ряд относительно y через $\sum c_1 y^i$. Для коэффициентов c_i получаются такие формулы:

$$\begin{aligned} c_1 &= b_1; \\ c_2 &= b_2 - a_2 b_1^2; \\ c_3 &= b_3 - (2a_2 b_1 b_2 + a_3 b_1^3), \end{aligned}$$

и так далее; ясно, что n-я строка этой таблицы имеет вид

$$c_n = b_n - Q_n(a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_{n-1}),$$

где Q_n — многочлен с положительными коэффициентами (именно ради этой положительности мы поставили знак минус перед $\sum a_i x^i$). Поскольку должно получиться $c_1 = 1$ и $c_n = 0$ при $n > 1$, утверждение леммы получится немедленно, если последовательно выражать b_2 через $b_1 = 1$ и a_2, затем b_3 через a_2, a_3, b_1 и b_2 и далее через a_2 и a_3, и т. д. $\square$

Покажем, что ряд $\sum_{i=1}^{\infty} b_i y^i$ имеет положительный радиус сходимости. В самом деле, ввиду формулы Коши-Адамара достаточно доказать это для ряда $\sum_{i=1}^{\infty} |b_i| y^i$. Однако же, ввиду леммы 12.21, имеем $|b_i| \leqslant \tilde{b}_i = P_i(|a_2|, |a_3|, \ldots, |a_n|)$. Далее, поскольку, ввиду следствия 12.6, имеем $|a_n| \leqslant Cr^n$ для всех $n \leqslant 2$

и для некоторых положительных констант C и r, имеем, далее, $P_i(|a_2|, |a_3|, \ldots, |a_n|) \leqslant \tilde{b}_i = P_i(Cr^2, Cr^3, \ldots, Cr^n)$. Стало быть, достаточно установить положительность радиуса сходимости ряда $z + \sum_{i=2}^{\infty} \tilde{b}_i z^i$. Ввиду все той же леммы 12.21, этот ряд — формальный обратный для ряда $x + \sum_{i=2}^{\infty} Cr^i x^i$, сходящегося к функции $\tilde{f}(x) = x + \frac{Cr^2x^2}{1-rx}$. Формула для корней квадратного уравнения показывает, что в окрестности нуля эта функция имеет обратную

$$\tilde{g}(z) = \frac{-(1+rz) + \sqrt{(1+rz)^2 + 4z(Cr^2 - r)}}{2(Cr^2 - r)},$$

и функция $\tilde{g}$ аналитична в окрестности нуля как композиция аналитических (квадратный корень аналитичен ввиду леммы 12.20!). Стало быть, положительный радиус сходимости имеет ряд $\sum_{i=1}^{\infty} b_i y^i$. Тем самым доказано, что в окрестности $W \ni 0$ определена аналитическая функция g, удовлетворяющая тождеству $f(g(y)) = y$. Положим $U = f^{-1}(W)$; тогда множество U открыто, и отображения $f\colon U \to W$ и $g\colon W \to U$ аналитичны и взаимно обратны. Все доказано. $\square$

В заключение лекции рассмотрим «принцип аналитического продолжения». В формулировке следующего предложения используется стандартный термин: *нулем* функции f называется любая точка, в которой f обращается в нуль.

Предложение 12.22. *Пусть $U \subset \mathbb{R}$ (или $U \subset \mathbb{C}$) — связное открытое подмножество и $f\colon U \to \mathbb{C}$ — аналитическая функция. Если f не является тождественным нулем на U, то множество ее нулей дискретно в U.*

Неформально говоря корни уравнения $f(x) = 0$ могут сгущаться к границе области U, но не внутри ее.

Лемма 12.23. *Пусть $\sum_{i=0}^{\infty} a_i(x-p)^i$ — степенной ряд с непустым кругом сходимости W, сходящийся на W к функции f. Если p — неизолированный нуль функции f, то $a_i = 0$ для всех i.*

Доказательство леммы. Если ряд Тейлора для f в точке p не является тождественным нулем, то $f(x) = (x-p)^r g(x)$, где $r > 0$, $g(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_{i+r}(x-p)^r$ и $a_r \neq 0$ (ряд в правой части, очевидно, также сходится на W). Следвоательно, функция g отлична от нуля в некоторой окрестности точки p, так что p — изолированный нуль. $\square$

Доказательство предложения. Пусть теперь функция f удовлетворяет условиям предложения. Обозначим через V множество точек, в которых f и все ее производные обращаются в нуль. Это множество с очевидностью замкнуто; кроме того, оно и открыто, поскольку если ряд Тейлора аналитической функции в данной точке является тождественным нулем, то в некоторой окрестности этой точки функция (а значит, и все ее производные) тождественно обращается в нуль. Если f имеет неизолированный нуль в U, то ввиду леммы $V \neq \varnothing$, так что $V = U$ ввиду связности. □

Следствие 12.24. *Пусть f и g — аналитические функции на открытом связном множестве U, и пусть ограничения f и g на непустое открытое подмножество $W \subset U$ совпадают. Тогда $f = g$ всюду на U.*

Следствие 12.24 называется *принципом аналитического продолжения;* оно верно и для аналитических функций многих переменных.

Принцип аналитического продолжения показывает, что аналитическая функция — очень жесткий объект: ее поведение на сколь угодно малом открытом множестве определяет поведение функции в целом. В частности, невозможно, чтобы графики двух аналитических функций совпадали на каком-то интервале, а затем расходились в разные стороны.

Отметим в заключение, что для бесконечно дифференцируемых функций действительного переменного следствие 12.24 неверно (см., например, функцию, тождественно равную нулю, и функцию, рассмотренную в замечании 12.16).