Лекция 13. Элементарные функции

Теперь мы, наконец, можем дать строгие определения показательной, логарифмической и тригонометрических функций. Начнем с показательной, причем сразу для произвольных комплексных значений аргумента.

Определение 13.1. *Экспонентой* комплексного числа $z \in \mathbb{C}$ называется число

$$\exp(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots \tag{13.1}$$

Разумеется, надо еще доказать, что ряд (13.1) сходится, что мы сейчас и сделаем:

Предложение 13.2. *Ряд* (13.1) *сходится абсолютно в* sup*-метрике (и тем самым равномерно) на любом замкнутом круге* $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leqslant R\}$, *где* $R > 0$.

Доказательство. В силу формулы Коши-Адамара (предложение 12.5) достаточно показать, что $\overline{\lim}\, \sqrt[n]{1/n!} = 0$; это, очевидно, вытекает из равенства $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty$. В свою очередь, это равенство выполнено, так ака для всякого $R > 0$ имеем, при $n > m = [R] + 1$,

$$n! \geqslant m! R^{n-m} \Rightarrow \sqrt[n]{n!} \geqslant \sqrt[n]{m!/R^m} \cdot R,$$

что больше, скажем, $R/2$ при всех достаточно больших n. □

(На всем $\mathbb{C}$ (или даже на всем $\mathbb{R}$) равномерная сходимость ряда (13.1) места не имеет.)

Стало быть, экспонента — аналитическая функция, определенная на всем $\mathbb{C}$. Отсюда (или прямо из определения) вытекают такие ее свойства:

Предложение 13.3. *(1) Функция* $z \mapsto \exp(z)$ *непрерывна.*

(2) $\exp(0) = 1$*; если* $x \in \mathbb{R}$, *то* $\exp(x) \in \mathbb{R}$.

(3) $\exp(\overline{z}) = \overline{\exp(z)}$ *(черта означает комплексное сопряжение).*

Основное свойство экспоненты таково:

Предложение 13.4. *Для любых комплексных чисел* z *и* w *имеем* $\exp(z + w) = \exp(z) \cdot \exp(w)$.

Доказательство. Если перемножить (в смысле определения 11.13) ряды для $\exp(z)$ и $\exp(w)$, то n-й член произведения будет равен

$$\frac{z^n}{n!} + \frac{z^{n-1}w}{(n-1)!1!} + \frac{z^{n-2}w^2}{(n-2)!2!} + \cdots + \frac{w^n}{n!},$$

что в силу формулы бинома Ньютона равно $(z+w)^n/n!$; стало быть, в произведении получится ряд для $\exp(z+w)$. Если $R > \max(|z|, |w|)$, то в круге с центром в нуле и радиуса R ряды для $\exp(z)$ и $\exp(w)$ сходятся абсолютно, стало быть, ввиду предложения 11.14, их произведение сходится к $\exp(z)\exp(w)$, что и требовалось. □

Следствие 13.5. *(1) Если $x \in \mathbb{R}$, то $\exp(x) > 0$.*

(2) $\lim_{x\to+\infty} \exp(x) = +\infty$, $\lim_{x\to-\infty} \exp(x) = 0$.

Доказательство. (1): если $x \geqslant 0$, то это очевидно; если $x < 0$, воспользуемся тем, что, ввиду предложения 13.4, $\exp(x) = 1/\exp(-x)$.

(2): при $x > 0$ имеем, очевидно, $\exp(x) > 1 + x$, откуда вытекает первое равенство. Второе равенство следует из тождества $\exp(-x) = 1/\exp(x)$. □

Предложение 12.12 гласит, что всякая аналитическая функция дифференцируема и ряд для ее производной получается формальным дифференцированием из ряда для самой функции; поскольку, как легко видеть, при формальном дифференцировании ряда (13.1) получается тот же самый ряд, мы доказали следующий факт:

Предложение 13.6. *Функция* exp, *рассматриваемая как функция из* $\mathbb{R}$ *в* $\mathbb{R}$, *дифференцируема; ее производная в точке* $x \in \mathbb{R}$ *равна* $\exp(x)$.

(Точно так же функция exp, рассматриваемая как функция из $\mathbb{C}$ в $\mathbb{C}$, голоморфна и совпадает со своей производной.)

Следствие 13.7. *Функция $x \mapsto \exp(x)$, где $x \in \mathbb{R}$, является строго возрастающей и задает взаимно однозначное соответствие между множеством действительных чисел и множеством положительных действительных чисел.*

Доказательство. Это немедленно следует из предложения 13.5(2) и теоремы о промежуточном значении. □

Определение 13.8. Пусть x — положительное действительное число. Его *натуральным логарифмом* называется такое действительное число y, что $\exp(y) = x$. Обозначение: $y = \ln x$.

Ввиду следствия 13.7 это определение корректно.

Предложение 13.9. *Функция $x \mapsto \ln x$ аналитична на множестве положительных действительных чисел; ее производная в точке x равна $1/x$.*

Доказательство. Поскольку функция exp аналитична и взаимно однозначна, а производная ее всюду отлдична от нуля, обратная к ней функция ln аналитична ввиду предложения 12.19.

Чтобы подсчитать производную логарифма в точке x, запишем, полагая $x = \exp(y)$ и $x_1 = \exp(y_1)$:

$$\lim_{x_1 \to x} \frac{\ln x_1 - \ln x}{x_1 - x} = \lim_{y_1 \to y} \frac{y_1 - y}{\exp(y_1) - \exp(y)} = \frac{1}{\exp'(y)} = \frac{1}{\exp(y)} = \frac{1}{x}.$$

Аналитичность (на самом деле всего лишь непрерывность) логарифма была использована в первом равенстве из нашей цепочки. □

Следствие 13.10. $\ln x = \int_1^x \frac{dt}{t}$. □

Для логарифма также можно получить разложение в степенной ряд:

Предложение 13.11. *Для всякого $x \in (-1;1)$ имеет место разложение*

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + \cdots. \qquad (13.2)$$

На всяком отрезке $[a;b] \subset (-1;1)$ этот ряд сходится абсолютно (по sup*-норме).*

Доказательство. На всяком отрезке $[a;b] \subset (-1;1)$ сходится абсолютно (по sup-норме) ряд

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^n x^n + \cdots.$$

В силу предложения 10.12 этот ряд можно почленно проинтегрировать от нуля до любого t, где $|t| < 1$, откуда получаем разложение (13.2). Поскольку на отрезке $[-r;r] \subset (-1;1)$ имеем $\|x^n/n\| = r^n/n \leqslant r^n$, абсолютная сходимость ряда (13.2) следует из сходимости бесконечно убывающей геометрической прогрессии. □

На самом деле равенство (13.2) имеет место и при $x = 1$. Иными словами,

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots .$$

Доказательство этого факта мы опустим.

Замечание 13.12. Мы не случайно определили логарифм, в отличие от экспоненты, только для положительных действительных чисел. Отображение $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}\setminus\{0\}$ является универсальным накрытием неодносвязного пространства $\mathbb{C}\setminus\{0\}$, так что обратного к нему, определенного на всем $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, нет и быть не может.

Теперь ничего не стоит определить степень с произвольным положительным основанием:

Определение 13.13. Пусть $a > 0$ — положительное действительное число, z — произвольное комплексное число. Положим по определению $a^z = \exp(z \ln a)$. Если $x \in \mathbb{R}$ и $x > 0$, положим $\log_a x = \ln x / \ln a$. Положим, наконец, $e = \exp(1)$.

Предоставляем читателю доказать известные из школы свойства логарифмической и показательной функций. Проверьте также, что $\ln e = 1$, $\log_e x = \ln x$ и $\exp(x) = e^x$.

Перейдем к тригонометрическим функциям.

Определение 13.14. Для $x \in \mathbb{R}$ положим по определению $\cos x = \mathrm{Re}(\exp(ix))$, $\sin x = \mathrm{Im}(\exp(ix))$, $\operatorname{tg} x = \sin x / \cos x$.

Хорошо знакомые свойства тригонометрических функций проверяются легко:

Предложение 13.15. *Для тригонометрических функций выполнены такие тождества:*

$$\sin 0 = 0, \quad \cos 0 = 1; \tag{13.3}$$

$$\sin(-x) = -\sin x; \quad \cos(-x) = \cos x; \tag{13.4}$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1; \tag{13.5}$$

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y; \tag{13.6}$$

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y. \tag{13.7}$$

Доказательство. (13.3) вытекает из того, что $\exp(0) = 1$. Чтобы доказать (13.4), достаточно заметить, что, ввиду предложения 13.3(3), при $x \in \mathbb{R}$ имеем $\exp(-ix) = \overline{\exp(ix)}$; из этого же тождества следует, что, опять-таки при $x \in \mathbb{R}$, имеем $|\exp(ix)|^2 = \exp(ix) \cdot \exp(-ix) = 1$, откуда получаем (13.5). Наконец, (13.6) и (13.7) получатся, если отделить действительную и мнимую часть в тождестве $\exp(i(x+y)) = \exp(ix) \cdot \exp(iy)$. □

Из тождеств (13.3–13.7) чисто формально выводятся все прочие тригонометрические тождества (вспомните, как это делалось в школе), кроме формул приведения, о которых речь пойдет чуть позже.

Простейшие свойства тригонометрических функций также получаются из нашего определения немедленно:

Предложение 13.16. *Функции* $\sin$ *и* $\cos$ *аналитичны; для* $x \in \mathbb{R}$ *имеем* $\sin'(x) = \cos x$, $\cos'(x) = -\sin x$. *Для синуса и косинуса имеются разложения в степенные ряды*

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots; \tag{13.8}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!} + \cdots, \tag{13.9}$$

причем эти ряды сходятся абсолютно по sup*-норме на каждом отрезке.*

Доказательство. Из предложения 13.6 и правила дифференцирования сложной функции следует, что производная функции $t \mapsto \exp(it)$ в точке $x \in \mathbb{R}$ равна $i\exp(ix)$; отделяя вещественную и мнимую часть, получаем формулы для производных синуса и косинуса.

Полагая в ряде для экспоненты $z = ix$, получаем, что

$$\exp(ix) = 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - i\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots;$$

из предложения 11.11 следует, что ряды

$$C(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!} + \cdots,$$

$$S(x) = ix - i\frac{x^3}{3!} + i\frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^{n+1}i\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots$$

абсолютно сходятся на любом отрезке, причем $\exp(x) = C(x) + S(x)$. Поскольку, очевидно, число $C(x)$ вещественное, а $S(x)$ — чисто мнимое, получаем, что $C(x) = \operatorname{Re}(\exp(ix)) = \cos x$ и $S(x) = i \operatorname{Im}(\exp(ix)) = i \sin x$. Все доказано. □

Разберемся с формулами приведения.

Предложение 13.17. *У уравнения* $\cos x = 0$ *имеется наименьший положительный корень, обозначаемый* $\pi/2$. *Имеем* $\sin(\pi/2) = 1$, *причем на отрезке* $[0; \pi/2]$ *синус монотонно возрастает, а косинус монотонно убывает.*

Доказательство. Мы знаем из формулы (13.3), что $\cos 0 = 1$. Покажем, что $\cos 2 < 0$. В самом деле, из разложения (13.8) имеем

$$\cos 2 = 1 - \frac{2^2}{2!} + \frac{2^4}{4!} - \frac{2^6}{6!} + \cdots = -\frac{1}{3} - \left(\frac{2^6}{6!} - \frac{2^8}{8!} + \frac{2^{10}}{10!} - \cdots \right). \quad (13.10)$$

Представим ряд в скобках в виде

$$\left(\frac{2^6}{6!} - \frac{2^8}{8!} \right) + \left(\frac{2^{10}}{10!} - \frac{2^{12}}{12!} \right) + \left(\frac{2^{14}}{14!} - \frac{2^{16}}{16!} \right) \cdots .$$

Поскольку при $n \geqslant 6$ имеем, очевидно, $2^n/n! > 2^{n+2}/(n+2)!$, все слагаемые в скобках положительны, откуда и из 13.10 имеем $\cos 2 < -\frac{1}{3} < 0$.

Поскольку $\cos 0 = 1 > 0$, теорема о промежуточном значении показывает, что уравнение $\cos x = 0$ имеет положительные корни. Положим теперь $c = \inf\{ x > 0 \mid \cos x = 0 \}$. Так как косинус — непрерывная функция, то множество ее корней замкнуто (как прообраз замкнутого множества $\{0\}$), так что $\cos c = 0$, откуда $c > 0$ и c — наименьший положительный корень уравнения $\cos x = 0$. Положим, как это принято, $c = \pi/2$. Тогда косинус положителен на интервале $(0; \pi/2)$; так как косинус — производная синуса, синус возрастает на этом интервале и, стало быть (так как $\sin 0 = 0$) положителен на нем. Так как $\sin^2(\pi/2) + \cos^2(\pi/2) = 1$, $\cos(\pi/2) = 0$ и $\sin(\pi/2) > 0$, получаем, что $\sin(\pi/2) = 1$. Так как $\cos'(x) = -\sin x$ и $\sin x > 0$ на $(0; \pi/2)$, косинус на этом интервале убывает. □

Следствие 13.18. *Для тригонометрических функций верны формулы приведения (в частности, синус и косинус периодичны с периодом* 2π*); верны также все известные из школы утверждения о знаках и интервалах монотонности синуса и косинуса.*

Доказательство. Формулы приведения следуют из формул для синуса и косинуса суммы и того, что $\sin(\pi/2) = 1$ и $\cos(\pi/2) = 0$. Утверждения о знаках и интервалах монотонности следуют из формул приведения и предложения 13.10. □

Следствие 13.19. *Функция* exp *периодична с периодом* $2\pi i$.

Доказательство. Это следует из того, что $\exp(2\pi i) = 1$. □

Покажем, что отображение $t \mapsto \exp(it)$ действительно осуществляет «наматывание» числовой оси на единичную окружность, которое используется при наивном определении тригонометрических функций числового аргумента. Во-первых:

Предложение 13.20. *Отображение* $t \mapsto \exp(it)$ *индуцирует взаимно однозначное отображение интервала* $[0; 2\pi)$ *на единичную окружность* $\{ z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1 \}$.

Доказательство. Если отождествить комплексное число $x + iy$ с точкой $(x; y) \in \mathbb{R}^2$, то отображение φ запишется как $t \mapsto (\cos t; \sin t)$. Из монотонности и непрерывности косинуса на отрезке $[0; \pi/2]$ следует, что при $t \in [0; \pi/2]$ число $\mathrm{Re}(\exp(it))$ принимает каждое значение в интервале $[0; 1]$ ровно один раз; если точка $x + iy$ принадлежит единичной окружности, то y определяется по x однозначно, с точностью до знака, так что φ индуцирует взаимно однозначное отображение отрезка $[0; \pi/2]$ на множество $\{ z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) \geqslant 0, \mathrm{Im}(z) \geqslant 0 \}$. Аналогично рассматриваются отрезки $[\pi/2; \pi]$, $[\pi; 3\pi/2]$, и т.д. □

Теперь покажем, что при отображении $t \mapsto \exp(it)$ точка за время t проходит путь t — это и будет означать, что наматывание числовой оси на окружность происходит «без растяжений и сжатий». Для начала уточним, что такое «путь, пройденный точкой», иными словами, что такое длина кривой. Для большинства разумных целей подходят такие определения. Напомним, что гладкой кривой на плоскости называется отображение $\varphi\colon [a; b] \to \mathbb{R}^2$, действующее по формуле $t \mapsto (x(t), y(t))$, где x и y — функции класса C^1. Поскольку вектор скорости точки, движущейся по закону $t \mapsto \varphi(t)$, равен $(x'(t); y'(t))$ в момент t, путь, пройденный точкой, естественно считать равным интегралу от длины вектора скорости, то есть $\int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt$. Этот интеграл и полагают равным длине кривой; нетрудно показать, что длина не зависит

от выбора параметризации: если $\psi\colon [c;d] \to [a;b]$ — взаимно однозначная функция класса C^1, то

$$\int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt = \int_c^d \sqrt{((x\circ\psi)'(u))^2 + ((y\circ\psi)'(u))^2}\,du$$

(это сразу следует из формулы (10.3)).

Итак, если отождествить число $x + iy \in \mathbb{C}$ с точкой $(x;y) \in \mathbb{R}^2$, то наше отображение запишется в виде $t \mapsto (\cos t; \sin t)$. Вектор скорости точки в момент t равен $((\cos t)'; (\sin t)') = (-\sin t; \cos t)$; его длина равна $\sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} = 1$, так что за время t точка проходит путь t. В частности, за время 2π точка пройдет путь 2π; ввиду предложения 13.20 это означает, что длина окружности радиуса 1 равна 2π, так что число π, определенное нами в предложении 13.17, является «настоящим».

Отметим наконец, что, подобно экспоненте, синус и косинус можно определить для произвольных комплексных чисел. В самом деле, из формул $e^{ix} = \cos x + i\sin x$ и $e^{-ix} = \cos x - i\sin x$, верных для любого $x \in \mathbb{R}$, вытекают формулы

$$\cos x = (e^{ix} + e^{-ix})/2, \tag{13.11}$$

$$\sin x = (e^{ix} - e^{-ix})/2i. \tag{13.12}$$

Правые части этих формул имеют смысл при любом $x \in \mathbb{C}$, и при любом $x \in \mathbb{C}$ их принимают за определение синуса и косинуса комплексных чисел. Из предложения 11.11 и абсолютной сходимости на любом круге ряда для экспоненты немедленно вытекает, что для синуса и косинуса комплексных чисел также верны разложения (13.8) и (13.9).