Анализ, 1 семестр (осень 2006)
Экзамен 10 декабря 2006
На работу отводится 4 часа
Разрешается пользоваться записками лекций и своими записями

1. Пусть $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — дважды дифференцируемая функция. Предположим, что $f''(x) \geqslant 0$ для всех x и что f ограничена сверху (т. е. существует такое M, что $f(x) \leqslant M$ при всех x). Докажите, что f — константа.

2. Пусть $f(x) = e^{\sin(x^{10}+x^{11})}$. Найдите $f^{(32)}(0)$.

3. Пусть x_n — наименьший положительный корень уравнения $\cos x = nx$ (где n — целое положительное число). Найдите асимптотику последовательности $\{x_n\}$ при $n \to \infty$.

4. Пусть
$$a_n = \sqrt[4]{1} + \sqrt[4]{2} + \ldots + \sqrt[4]{n}.$$
Найдите асимптотику последовательности $\{a_n\}$ при $n \to \infty$.

5. Существует ли непрерывное и взаимно однозначное отображение $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$?

6. Пусть для каждого целого $n \geqslant 1$ дано конечное множество X_n, а для каждого целого $n \geqslant 2$ дано отображение $f_n\colon X_n \to X_{n-1}$. Докажите, что существует последовательность $\{x_n\}$ (n пробегает все целые положительные числа), для которой $x_n \in X_n$ и $f_n(x_n) = x_{n-1}$ при всех $n > 1$.

7. Пусть
$$x_n = \sqrt{1 + 2\sqrt{1 + 3\sqrt{1 + 4\sqrt{1 + \ldots \sqrt{1+n}}}}}.$$
Докажите, что существует предел $\lim_{n\to\infty} x_n$, и найдите этот предел.