Лекция 2. Непрерывность и пределы

В этой лекции также нет ни одной трудной теоремы, но зато много важных определений.

Определение 2.1. Пусть $f\colon X \to Y$ — отображение топологических пространств. Отображение f называется *непрерывным в точке* $x \in X$, если для всякой окрестности $V \ni f(x)$ существует такая окрестность $U \ni x$, что $f(U) \subset V$.

Отображение f называется *непрерывным*, если оно непрерывно в каждой точке $x \in X$.

Предложение 2.2. *Пусть X и Y — топологические пространства. Отображение $f\colon X \to Y$ непрерывно тогда и только тогда, когда для всякого открытого подмножества $V \subset Y$ его прообраз $f^{-1}(V) \subset X$ также открыт.*

Доказательство. «Только тогда»: пусть $V \subset Y$ открыто, и пусть $x \in f^{-1}(V)$. Так как f непрерывна в точке x, согласно определению 2.1 найдется такое открытое подмножество $U_x \subset X$, что $U_x \ni x$ и $f(U_x) \subset V$ — иными словами, $U_x \subset f^{-1}(V)$. Стало быть, множество $f^{-1}(V)$ вместе с каждой точкой x содержит ее окрестность U_x и тем самым открыто.

«Тогда»: пусть прообразы всех открытых множеств открыты; чтобы показать, что f непрерывна в каждой точке $x \in X$, достаточно заметить, что если $V \ni f(x)$ открыто, то множество $U = f^{-1}(V)$ открыто, содержит x, и $f(U) \subset V$. $\square$

Важный частный случай непрерывных отображений — гомеоморфизмы:

Определение 2.3. Пусть X и Y — топологические пространства; отображение $f\colon X \to Y$ называется *гомеоморфизмом*, если оно непрерывно, взаимно однозначно и обратное отображение f^{-1} также непрерывно.

Топологические пространства, между которыми существует гомеоморфизм, называются *гомеоморфными*.

Из определений очевидно, что взаимно однозначное непрерывное отображение является гомеоморфизмом тогда и только тогда, когда оно переводит открытые множества в открытые. Если отождествить топологические пространства X и Y, между которыми существует гомеоморфизм $f\colon X \to Y$, с помощью отображения f, то окажется, что открытые множества у них одни и те же, так что в каком-то смысле это «одно и то же» пространство.

Определение предела совершенно аналогично поределению непрерывности.

Определение 2.4. Пусть X и Y — топологические пространства, $a \in X$, и f — отображение из X в Y или из $X \setminus \{a\}$ в Y. Говорят, что точка $b \in Y$ является *пределом f при x, стремящемся к a*, если функция $\tilde{f}\colon X \to Y$, определенная по правилу

$$\tilde{f}(z) = \begin{cases} f(z), & z \neq a; \\ b, & z = a. \end{cases}$$

является непрерывной в точке a. Обозначение: $b = \lim_{x\to a} f(x)$.

Иными словами, $b = \lim_{x\to a} f(x)$, если для всякой окрестности $U \ni b$ существует такая окрестность $V \ni a$, что $f(V \setminus \{a\}) \subset U$.

В эту же схему вписывается и предел последовательности. Именно, положим $\bar{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ и введем на $\bar{\mathbb{N}}$ топологию, в которой подмножество $U \subset \bar{\mathbb{N}}$ открыто тогда и только тогда, когда оно либо содержит ∞ и все натуральные числа, начиная с некоторого $N \in \mathbb{N}$, либо не содержит ∞.

Последовательность точек $a_n \in X$, где X — топологическое пространство — не что иное, как функция $f\colon \mathbb{N} \to X$, для которой $f(n) = a_n$. Если теперь отождествить $\mathbb{N}$ и $\bar{\mathbb{N}} \setminus \{\infty\}$, то определение 2.4 применимо и к этому случаю, и последовательность $\{a_n\}$ сходится к a, если для всякой окрестности $U \ni a$ существует такое $N > 0$, что при всех $n \geqslant N$ имеем $a_n \in U$ — в полном согласии с обычным определением предела последовательности.

Как известно, если предел числовой последовательности или функции существует, то он единственен. Для наших общих определений аналогичный факт верен не всегда (глупый пример: если в топологическом пространстве X открытыми являются только пустое множество и все X — что аксиомами топологического пространства не запрещено — то всякая точка $x \in X$ будет пределом всякого отображения в X). Чтобы отсечь такую патологию, введем следующий важный класс топологических пространств.

Определение 2.5. Топологическое пространство X называется *хаусдорфовым* (или *отделимым*), если для любых двух различных точек $x, y \in X$ существуют такие открытые подмножества $U \ni x$ и $V \ni y$, что $U \cap V = \varnothing$.

Сразу же заметим, что всякое метрическое пространство хаусдорфово: в качестве открытых множеств $U \ni x$ и $V \ni y$ можно взять открытые шары $B_{d/2}(x)$ и $B_{d/2}(y)$, где d — расстояние между x и y (то, что они не пересекаются, следует из неравенства треугольника).

Все топологические пространства, с которыми мы будем иметь дело в курсе, будут хаусдорфовыми. Нехаусдорфовы пространства в жизни тоже встречаются (например, они существенно используются в алгебраической геометрии).

Определение 2.6. Пусть X — топологическое пространство. Точка $x \in X$ называется *изолированной*, если множество $\{x\}$ открыто.

Неформально говоря, точка изолирована, если «поблизости от нее» других точек нет. Например, пространство дискретно тогда и только тогда, когда все его точки изолированы.

Предложение 2.7. *Пусть X и Y — топологические пространства; предположим, что пространство Y хаусдорфово и что $a \in X$ — неизолированная точка. Тогда для всякого отображения $f\colon X \setminus \{a\} \to Y$ предел $\lim_{x\to a} f(x)$ единствен (если он существует).*

Доказательство. Пусть, от противного, пределами $f(x)$ при x, стремящемся к a, будут две разные точки b_1 и b_2. Поскольку Y хаусдорфово, в нем существуют непересекающиеся открытые множества $V_1 \ni b_1$ и $V_2 \ni b_2$. Согласно определению предела, в пространстве X существуют такие открытые подмножества U_1 и U_2, содержащие a, что $f(U_1 \setminus \{a\}) \subset V_1$ и $f(U_2 \setminus \{a\}) \subset V_2$. Так как точка a неизолирована, открытое множество $U_1 \cap U_2$ содержит по крайней мере одну точку $a' \neq a$. Тогда $f(a') \in V_1 \cap V_2$, что противоречит тому, что V_1 и V_2 не пересекаются. $\square$

Многие (но не все!) топологические пространства, встречающиеся в анализе, являются метрическими (точнее говоря, «метризуемыми»: так говорят, когда важна не метрика как таковая, а задаваемая ей топология). Для метризуемых пространств большинство рассмотрений, связанных с пределами, сводятся к привычным пределам последовательностей. Приведем только один пример такогоސведе́ния.

Предложение 2.8. *Пусть X — метрическое пространство и $M \subset X$ — подмножество. Тогда его замыкание $\bar{M} \subset X$ состоит из всех пределов последовательностей, все элементы которых лежат в M.*

Доказательство. Пусть N — множество пределов последовательностей из элементов множества M. Сначала покажем, что $\bar{M} \subset N$, а затем, что $N \subset \bar{M}$.

$\bar{M} \subset N$: пусть $x \in \bar{M}$. Тогда для всякого $n \in \mathbb{N}$ шар $B_{1/n}(x)$ имеет непустое пересечение с M; выберем в этом пересечении точку (произвольным образом) и обозначим ее x_n. Поскольку $\rho(x_n, x) < 1/n$, имеем $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, так что $x \in N$.

$N \subset \bar{M}$: Пусть $x \in N$, тогда $x = \lim_{n\to\infty} x_n$, где $x_n \in M$ для всех n. По определению предела, для всякого открытого множества $U \supset x$ найдется (и не одно!) число n, для которого $x_n \in U$; стало быть, $U \cap M \neq \varnothing$, откуда $x \in \bar{M}$. $\square$