Лекция 3. Действительные числа

На этой лекции мы построим действительные числа, исходя из чисел рациональных, множество которых обозначается $\mathbb{Q}$.

Мы будем определять действительное число как последовательность рациональных чисел, «его приближающую». При этом, во-первых, надо, чтобы последовательность в принципе могла к чему-нибудь стремиться (приближения к какому числу задает последовательность $a_n = (-1)^n$?), и во вторых, надо отождествлять последовательности, «стремящиеся к одному и тому же».

Определение 3.1. Последовательность рациональных чисел $\{a_n\}$ называется *фундаментальной*, если для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое натуральное N, что $|a_m - a_n| < \varepsilon$, как только $m, n \geqslant N$.

(В этом определении ε — рациональное число: ведь мы делаем вид, что никаких других не знаем!)

Определение 3.2. Две фундаментальные последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ называются *эквивалентными*, если $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0$.

Эквивалентность фундаментальных последовательностей будем обозначать знаком $\sim$.

Поскольку предел суммы равен сумме пределов, отношение эквивалентности на множестве фундаментальных последовательностей действительно заслуживает этого названия[1].

Определение 3.3. *Действительным числом* называется класс эквивалентности фундаментальных последовательностей рациональных чисел. Множество действительных чисел обозначается $\mathbb{R}$.

Если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{Q}$, то последовательность $\{a_n\}$ эквивалентна последовательности, все члены которой совпадают с a. Если отождествить класс всякой такой последовательности с числом a, то получим вложение $\mathbb{Q}$ в $\mathbb{R}$; далее мы всегда будем иметь в виду, что $\mathbb{Q}$ вложено в $\mathbb{R}$ именно таким образом.

Итак, *множество* действительных чисел мы построили. Теперь надо определить сложение, умножение и неравенства и убедиться, что они обладают привычными свойствами. Для всего этого нужна небольшая техническая подготовка.

[1] То есть оно рефлексивно ($a \sim a$ для всех a), симметрично (если $a \sim b$, то $b \sim a$) и транзитивно (если $a \sim b$ и $b \sim c$, то $a \sim c$).

Предложение 3.4. *Если последовательность* $\{a_n\}$ *сходится к числу* $a \in \mathbb{Q}$, *то она фундаментальна.*

Доказательство. Из условия следует, что для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое $N \in \mathbb{N}$, что $|a_n - a| < \varepsilon/2$ при $n > N$. Следовательно, если $m, n \geqslant N$, то $|a_m - a_n| \leqslant |a_m - a| + |a_n - a| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$. ☐

Предложение 3.5. *Всякая фундаментальная последовательность ограничена.*

(Напомним, что последовательность $\{a_n\}$ называется *ограниченной*, если существует такое число M, что $|a_n| \leqslant M$ для всех n.)

Доказательство. Если $\{a_n\}$ фундаментальна, то существует такое N, что $|a_m - a_n| < 1$, как только $m, n \geqslant N$. Следовательно, все члены последовательности с номерами, большими N, заключены между $a_N - 1$ и $a_N + 1$; поскольку кроме них, у последовательности имеется только конечное число членов, последовательность ограничена. ☐

Теперь определим сложение, вычитание и умножение действительных чисел. Заметим, что если $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ — фундаментальные последовательности, то последовательности $\{a_n \pm b_n\}$ и $\{a_n b_n\}$ также фундаментальны. В самом деле, для суммы и разности это немедленно вытекает из неравенства $|(a_m \pm b_m) - (a_n \pm b_n)| \leqslant |a_m - a_n| + |b_m - b_n|$, а для произведения выводится из предложения 3.5 следующим образом. Поскольку $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ фундаментальны, существует такое M, что $|a_n| \leqslant M$ и $|b_n| \leqslant M$ для всех n; стало быть, если N настолько велико, что $|a_m - a_n| < \varepsilon/2M$ и $|b_m - b_n| < \varepsilon/2M$ при $m, n > N$, то

$$|a_m b_m - a_n b_n| = |a_m(b_m - b_n) + (a_m - a_n)b_n| \leqslant \\ \leqslant |a_m| \cdot |b_m - b_n| + |a_m - a_n| \cdot |b_n| < M\frac{\varepsilon}{2M} + M\frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon.$$

Имея это в виду, определим сумму (соотв. разность, произведение) действительных чисел, заданных фундаментальными последовательностями $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$, как действительно число, заданное фундаментальной последовательностью $\{a_n + b_n\}$ (соотв. $\{a_n - b_n\}$, $\{a_n b_n\}$).

Чтобы это определение было корректным, надо, чтобы при замене последовательности $\{a_n\}$ или $\{b_n\}$ на эквивалентную результирующая последовательность также заменялась на эквивалентную. Для сложения и вычитания это совсем легко: если $\{a_n\} \sim \{a'_n\}$, т.е. $a_n - a'_n \to 0$, то и последовательность $(a_n + b_n) - (a'_n - b_n) = a_n - a'_n$ также стремится к нулю. Для умножения это опять-таки выводится из предложения 3.5: если $a_n - a'_n \to 0$ и $|b_n| \leqslant M$ при всех n, то $|a_n b_n - a'_n b_n| \leqslant M \cdot |a_n - a'_n|$, и правая часть этого неравенства стремится к нулю.

Итак, мы определили на множестве $\mathbb{R}$ действительных чисел сложение и умножение; очевидно, что эти операции обладают обычными свойствами (коммутативность, ассоциативность, наличие нуля и противоположных элементов, дистрибутивность).

Чтобы доказать возможность деления на ненулевое число, а также определить неравенства, нам понадобится еще один технический факт.

Предложение 3.6. *Пусть $\{a_n\}$ — фундаментальная последовательность рациональных чисел, не стремящаяся к нулю. Тогда либо существуют такие $c > 0$ и $N \in \mathbb{N}$, что $a_n \geqslant c$ при всех $n > N$, либо существуют такие $c < 0$ и $N \in \mathbb{N}$, что $a_n \leqslant c$ при всех $n > N$.*

Доказательство. Поскольку $\{a_n\}$ не стремится к нулю, существует такое $\varepsilon > 0$, что для бесконечно большого количества номеров $n \in \mathbb{N}$ имеем $|a_n| \geqslant \varepsilon$. Поскольку $\{a_n\}$ фундаментальна, существует такое $N \in \mathbb{N}$, что при $m, n \geqslant N$ имеем $|a_m - a_n| < \varepsilon/2$. Так как, в частности, существует $n \geqslant N$, для которого $|a_n| \geqslant \varepsilon$, отсюда следует, что при $m \geqslant N$ имеем либо $a_m > \varepsilon/2$, либо $a_m < -\varepsilon/2$. Так как при $m, m' \geqslant N$ имеем $|a_m - a_{m'}| < \varepsilon/2$, отсюда вытекает, что только одно из этих неравенств выполняется при всех $m \geqslant N$. В первом из этих случаев полагаем $c = \varepsilon/2$, во втором полагаем $c = -\varepsilon/2$. □

Пусть теперь $\{a_n\}$ — фундаментальная последовательность, не стремящаяся к нулю. Тогда из предложения 3.6 вытекает, что существует такое $c > 0$, что $|a_n| > c$ при всех $n \geqslant N$ для некоторого $N \in \mathbb{N}$. Положим теперь $b_n = 1/a_n$ при $n \geqslant N$ и $b_n = 0$ при $n < N$. Из неравенства $|b_m - b_n| = \frac{|a_m - a_n|}{a_m a_n} \leqslant \frac{|a_m - a_n|}{c^2}$, выполненного при всех $m, n \geqslant N$, следует, что последовательность $\{b_n\}$ фундаментальна. Так как $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = 1$, число, представляемое последовательностью $\{b_n\}$, обратно к числу, представляемому фундаментальной последовательностью $\{a_n\}$. Этим доказана возможность деления на ненулевые числа. По-ученому говоря, мы установили, что действительные числа образуют *поле*.

Чтобы определить неравенства, достаточно определить, что такое положительное число. Заметим, что если $\{a_n\}$ — фундаментальная последовательность, не стремящаяся к нулю, то ввиду предложения 3.6 либо $a_n > 0$ для всех n, кроме конечного числа, либо $a_n < 0$ для всех n, кроме конечного числа. В первом случае будем говорить, что число, соответствующее последовательности $\{a_n\}$, *положительно*, а во втором — что оно *отрицательно*. Надо еще проверить (опять-таки с помощью предложения 3.6), что положительность и отрицательность не зависит от выбора фундаментальной последовательности, представляющей данное число — сделайте это самостоятельно.

Легко видеть, что выполнены следующие утверждения:

- всякое $\alpha \in \mathbb{R}$ либо положительно, либо равно нулю, либо отрицательно, причем три эти возможности попарно несовместимы.
- $\alpha \in \mathbb{R}$ положительно тогда и только тогда, когда $-\alpha$ отрицательно;
- сумма и произведение положительных чисел положительны.

Если теперь положить по определению, что $\alpha > \beta$ тогда и только тогда, когда $\alpha - \beta$ положительно, то окажется, что для действительных чисел выполнены все обычные свойства неравенств (поскольку они формально выводятся из перечисленных выше свойств множества положительных чисел). По-ученому говоря, мы ввели на $\mathbb{R}$ структуру *упорядоченного поля.*

Далее, можно определить абсолютную величину действительного числа (по формуле $|a| = \max(a, -a)$) и проверить все обычные неравенства с модулями. Эта чисто формальная деятельность предоставляется читателю.

Коль скоро определены неравенства, обретают смысл определенная в первой лекции топология на $\mathbb{R}$ и понятие предела последовательности действительных чисел; более того, легко видеть, что верны все стандартные факты из «арифметики пределов» (предел суммы равен сумме пределов и пр.), поскольку в их доказательстве ничего, кроме свойств неравенств, не используется.

Кроме того, раз мы строго определили сложение и неравенства между действительными числами, стало законным и определение метрического пространства.

Наша следующая тема — так называемые теоремы о полноте действительных чисел.

Покажем сначала, что всякое действительное число является пределом последовательности рациональных чисел.

Предложение 3.7. *Для всякого $\alpha \in \mathbb{R}$ существует такая последовательность $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ рациональных чисел, что $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$.*

Доказательство. Пусть действительное число α представляется фундаментальной последовательностью $\{a_n\}$. Покажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$ (предел берется в $\mathbb{R}$!).

Лемма 3.8 («аксиома Архимеда»). *Для всякого $\alpha \in \mathbb{R}$ найдется такое $n \in \mathbb{N}$, что $n > \alpha$; для всякого положительного $\varepsilon \in \mathbb{R}$ найдется такое $r \in \mathbb{Q}$, что $0 < r < \varepsilon$.*

Доказательство леммы. Второе утверждение леммы немедленно следует из первого, если положить $\alpha = 1/\varepsilon$ и $r = 1/n$. Для доказательства первого утверждения заметим, что фундаментальная последовательность $\{a_m\}$, представляющая число α, ограничена ввиду предложения 3.5; в частности, $a_m < M$ для некоторого $M \in \mathbb{Q}$ и всех m. Пусть n — такое натуральное число, что $n > M + 1$. Тогда $n - a_m > 1$ для всех m, так что число $n - \alpha$, представляемое фундаментальной последовательностью $\{n - a_m\}$, положительно. $\square$

Возвращаясь к доказательству предложения, заметим, что ввиду второй части леммы достаточно убедиться, что для всякого *рационального* $r > 0$ существует такое $N \in \mathbb{N}$, что $|a_n - \alpha| \leqslant r$ при всех $n \geqslant N$. Поскольку, однако, последовательность $\{a_n\}$ удовлетворяет условиям определения 3.1, существует такое $N \in \mathbb{N}$, что $|a_m - a_n| \leqslant r$ при $m, n \geqslant N$. В частности, при всех $m, n \geqslant N$ имеем $|a_m - a_N| \leqslant r$, или, что равносильно, $a_n - r \leqslant a_m \leqslant a_n + r$. Ввиду нашего определения неравенств отсюда вытекает, что $a_n - r \leqslant \alpha \leqslant a_n + r$, т.е. $|a_n - \alpha| \leqslant r$. Так как это верно при всех $n \geqslant N$, предложение доказано. $\square$

Будем называть последовательность действительных чисел *фундаментальной*, если она удовлетворяет условиям определения 3.1 (при этом под ε понимается произвольное действительное число).

Теорема 3.9 (критерий Коши). *Последовательность действительных чисел имеет предел тогда и только тогда, когда она фундаментальна.*

Доказательство. Часть «только тогда» доказывается дословно так же, как предложение 3.4. Докажем часть «тогда».

Пусть $\{\alpha_n\}$ — фундаментальная последовательность действительных чисел. Ввиду предложения 3.7, для всякого $n \in \mathbb{N}$ существует такое $r_n \in \mathbb{Q}$, что $|\alpha_n - r_n| < 1/n$. Заметим, что последовательность $\{r_n\}$ фундаментальна: имеем

$$|r_m - r_n| \leqslant |\alpha_m - \alpha_n| + \frac{1}{m} + \frac{1}{n},$$

и ясно, что если при $m, n \geqslant N$ имеем $|\alpha_m - \alpha_n| < \varepsilon/3$, а также $1/m < \varepsilon/3$ и $1/n < \varepsilon/3$, то для таких m и n будет выполнено неравенство $|r_m - r_n| < \varepsilon$. Пусть α — действительное число, соответствующее фундаментальной последовательности рациональных чисел $\{r_n\}$; из предложения 3.7 (точнее говоря, из его доказательства) явствует, что $\lim_{n\to\infty} r_n = \alpha$. Поскольку последовательность $\{r_n\}$ и $\{\alpha_n - r_n\}$ обе имеют предел (вторая из них стремится к нулю, поскольку ее n-й член по модулю меньше, чем $1/n$), из теоремы о пределе суммы вытекает, что предел есть и у последовательности $\{\alpha_n\}$. $\square$

Доказательство критерия Коши — последнее место в нашем курсе, где мы напрямую использовали определение действительных чисел как классов фундаментальных последовательностей. Далее мы будем пользоваться более удобными средствами. Наряду с критерием Коши важную роль играет «теорема о верхней грани».

Определение 3.10. *Точной верхней гранью* подмножества $X \subset \mathbb{R}$ называется наименьшее из чисел $c \in \mathbb{R}$, обладающих следующим свойством: $x \leqslant c$ при всех $x \in X$ (такие числа мы будем называть «верхними границами» множества X). Точная верхняя грань множества X обозначается $\sup X$.

Очевидно, что точная верхняя грань (иногда мы будем для краткости говорить просто «верхняя грань») единственна, если она существует. Ясно, что она не существует, если множество M не является «ограниченным сверху» (то есть содержит сколь угодно большие числа). Во всех остальных случаях, однако, точная верхняя грань имеется:

Теорема 3.11 (о верхней грани). *Всякое ограниченное сверху непустое подмножество $X \subset \mathbb{R}$ имеет верхнюю грань.*

Доказательство. Обозначим через x_1 наибольшее целое число, не являющееся верхней границей множества X (такое существует ввиду «аксиомы Архимеда» 3.8). Построим теперь по индукции последовательность чисел $\{x_n\}$, ни одно из которых не является верхней границей множества X, следующим образом. В качестве x_1 берем число, построенное выше, а x_{n+1} строим по x_n так: если $x_n + 1/2^n$ также не является верхней границей множества X, то полагаем $x_{n+1} = x_n + 1/2^n$, в противном же случае полагаем $x_{n+1} = x_n$. Из нашего построения следует, что для всякого $n \in \mathbb{N}$ число $x_n + 1/2^{n-1}$ является верхней границей для X.

Заметим, что $0 \leqslant x_{n+1} - x_n \leqslant 1/2^n$, так что при $m > n$ имеем

$$0 \leqslant x_m - x_n \leqslant \frac{1}{2^n} + \ldots + \frac{1}{2^{m-1}} = \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{1}{2^{m-2}} \leqslant \frac{1}{2^{n-1}};$$

стало быть, последовательность $\{x_n\}$ фундаментальна и тем самым по критерию Коши имеет предел (обозначим его x). Покажем, что x — верхняя грань множества X.

1) x является верхней границей для X. Пусть, напротив, $y \in X$ и $y > x$. Тогда существует такое $n \in \mathbb{N}$, что $x + 1/2^{n-1} < y$; имеем $x_n + 1/2^{n-1} \leqslant x + 1/2^{n-1} < y$, в противоречие с тем, что $x_n + 1/2^{n-1}$ — верхняя граница для X.

2) x является наименьшей верхней границей для X. Пусть, напротив, $y < x$ и y является верхней границей для x. Тогда существует такое $n \in \mathbb{N}$, что $x_n \geqslant y$; поскольку y является верхней границей для X, а x_n — нет, получаем противоречие. $\square$

Точной нижней гранью, или просто нижней гранью подмножества $X \subset \mathbb{R}$ называется наибольшее из таких чисел c, что $c \leqslant x$ при всех $x \in X$. Из теоремы 3.11 ясно, что всякое ограниченное снизу множество имеет (единственную) точную нижнюю грань. Точная нижняя грань множества X обозначается $\inf X$.

Отметим еще две теоремы о полноте, которые без труда выводятся из теоремы о верхней грани:

1) *Всякая монотонно возрастающая ограниченная последовательность имеет предел.*

2) Принцип вложенных отрезков: *если*

$$[a_1; b_1] \supset [a_2; b_2] \supset \ldots \supset [a_n; b_n] \supset \ldots$$

— бесконечная последовательность вложенных друг в друга отрезков на $\mathbb{R}$, то существует точка, принадлежащая всем этим отрезкам.

(Указание. Предел последовательности — верхняя грань множества ее членов; всем отрезкам принадлежит, например, верхняя грань множества их левых концов.)