Лекция 5. Связность; пополнение

Эта лекция посвящена двум слабо связанным между собой темам из «абстрактной топологии» (по возможности, с конкретными приложениями).

Предложение-определение 5.1. Топологическое пространство X называется *несвязным*, если выполнено одно из трех эквивалентных условий:

1) X представимо в виде объединения двух непустых непересекающихся открытых подмножеств.

2) X представимо в виде объединения двух непустых непересекающихся замкнутых подмножеств.

3) Существует непустое и отличное от всего X подмножество $M \subset X$, являющееся одновременно открытым и замкнутым.

Топологическое пространство называется *связным*, если оно не является несвязным.

Подмножество Y в топологическом пространстве X называется *связным*, если оно связно относительно индуцированной топологии.

Эквивалентность трех условий проверяется тривиально.

Приведем сначала примеры несвязных пространств.

Пример 5.2. Пусть $M \subset \mathbb{R}$ — связное подмножество. Тогда оно обязано быть «выпуклым»: если $a, b \in M$ и $a < b$, то $[a; b] \subset M$.

В самом деле, если $a < z < b$ и $z \notin M$, то имеем

$$M = (M \cap (-\infty; z)) \cup (M \cap (z; \infty)),$$

что и дает разбиение M на два непересекающихся непустых открытых подмножества.

Привести нетривиальный пример связного пространства немногим труднее:

Предложение 5.3. *Всякий отрезок* $[a; b] \subset \mathbb{R}$ *связен.*

Доказательство. Предположим противное; тогда существует отличное от $[a; b]$ непустое открыто-замкнутое (то есть одновременно открытое и замкнутое) подмножество $M \subset [a; b]$; не ограничивая общности, можно считать, что $M \ni a$ (в противном случае заменим M на его дополнение). Покажем, что $M = [a; b]$ — это и даст желаемое противоречие.

В самом деле, положим $X = \{\, x \in (a; b] \mid [a; x] \subset M \,\}$. Поскольку множество M открыто и содержит a, оно содержит также интервал вида $[a; a+\varepsilon)$ для некоторого $\varepsilon > 0$, так что $X \neq \varnothing$. Пусть $\xi = \sup X$; покажем, что $\xi \in X$. В самом деле, ясно, что (независимо от специфики множества X) существует возрастающая последовательность чисел $x_n \in X$, для которой $\xi = \lim_{n\to\infty} x_n$. Поскольку $[a; x_n] \subset M$ для всех n, имеем $[a; \xi) \subset \bigcup_n [a; x_n] \subset M$. Кроме того, $\xi \in M$, так как M замкнуто, а ξ является пределом последовательности элементов множества M. Стало быть, $[a; \xi] \subset M$ и $\xi \in X$. Покажем теперь, что $\xi = b$. В самом деле, если $\xi < b$, то, ввиду открытости множества M, существует такое $\varepsilon > 0$, что $[\xi - \varepsilon; \xi + \varepsilon] \subset M$. Следовательно, $[a; \xi + \varepsilon] = [a; \xi] \cup [\xi - \varepsilon; \xi + \varepsilon] \subset M$ и $\xi + \varepsilon \in X$, в противоречие с тем, что $\xi = \sup X$. Значит, $\xi = b$ и $M = [a; b]$ — противоречие. □

Докажем теперь несколько простых, но важных общих свойств связных пространств.

Предложение 5.4. *Пусть $f\colon X \to Y$ — непрерывное отображение топологических пространств, причем X связно. Тогда $f(X) \subset Y$ также связно.*

Доказательство. Пусть, напротив, $f(X)$ несвязно. Тогда существуют такие открытые подмножества $U_1, U_2 \subset X$, что $X \subset U_1 \cup U_2$, $U_1 \cap U_2 \cap X = \varnothing$, и оба пересечения $X \cap U_1$ и $X \cap U_2$ непусты. Отсюда вытекает, что X является объединением непустых непересекающихся подмножеств $f^{-1}(U_1)$ и $f^{-1}(U_2)$ и тем самым несвязно — противоречие. □

Предложение 5.5. *Пусть топологическое пространство X обладает таким свойством: для любых двух точек $x, y \in X$ существует связное подмножество $I \subset X$, содержащее x и y. Тогда X связно.*

Доказательство. Предположим противное. Тогда $X = U_1 \cup U_2$, где открытые множества U_1 и U_2 непусты и не пересекаются. Выберем точки $x \in U_1$ и $y \in U_2$, и пусть $I \subset X$ — связное подмножество, существование которого утверждается в условии предложения. Тогда $I = (I \cap U_1) \cup (I \cap U_2)$, причем оба этих множества открыты в I в индуцированной топологии и непусты (одно содержит x, другое содержит y). Значит, I несвязно — противоречие. □

Сопоставляя предложения 5.4 и 5.5, получаем, что любой интервал в $\mathbb{R}$ (такой, как $(a;b]$, $(-\infty;a)$, и т. д., в том числе само пространство $\mathbb{R}$) является связным.

Обобщая предыдущее замечание, приходим к такому определению:

Определение 5.6. Топологическое пространство X называется *линейно связным*, если для всяких двух точек $x, y \in X$ существуют такие отрезок $[a;b] \subset \mathbb{R}$ и непрерывное отображение $f\colon [a;b] \to \mathbb{R}$, что $f(a) = x$ и $f(b) = y$.

Предложения 5.4 и 5.5 показывают, что всякое линейно связное пространство является связным. В частности, связны пространство $\mathbb{R}^n$, любой параллелепипед в $\mathbb{R}^n$, и вообще любое выпуклое подмножество в $\mathbb{R}^n$. Существуют примеры связных пространств, не являющихся линейно связными (уже среди замкнутых подмножеств в $\mathbb{R}^2$).

Связные подмножества в $\mathbb{R}$ можно полностью описать:

Предложение 5.7. *Подмножество $M \subset \mathbb{R}$ связно тогда и только тогда, когда оно является отрезком $[a;b]$, полуоткрытым интервалом $(a;b]$ или $[a;b)$ или открытым интервалом $(a;b)$, где $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. (При символах ∞ и $-\infty$ квадратные скобки не ставятся; случай $a = b$ не исключен.)*

Доказательство. Мы уже отмечали, что всякое множество указанного вида является связным; покажем, что никаких других связных подмножеств в $\mathbb{R}$ нет.

Разберем сначала случай, когда M ограничено. Положим $a = \inf M$, $b = \sup M$. Заметим, что $(a;b) \subset M$. В самом деле, если $a < c < b$, то (по определению верхней и нижней граней) существуют такие числа u и v, что $a < u < c < v < b$ и при этом $u, v \in M$; пример 5.2 показывает, что $[u;v] \subset M$ и, в частности, $c \in M$.

Итак, $(a;b) \subset M$, никакие числа, меньшие a или большие‘b, во множество M не входят, и остается разобрать четыре возможных случая в зависимости от того, входят ли в M сами числа a и b — при этом получаем варианты $(a;b)$, $[a;b)$, $(a;b]$ и $[a;b]$.

Случай, когда M не ограниченно сверху и/или снизу, разберите самостоятельно. $\square$

Нелишне заметить, что ни о какой классификации связных подмножеств в $\mathbb{R}^n$ при $n > 1$ речи быть не может.

Теперь приведем приложение доказанных общих фактов к конкретному анализу.

Предложение 5.8. *Пусть f — непрерывная функция на отрезке $[a;b]$ с действительными значениями. Тогда множество ее значений $f([a;b]) \subset \mathbb{R}$ также является отрезком. В частности, f принимает все значения, промежуточные между $f(a)$ и $f(b)$.*

Доказательство. Предложения 4.8 и 4.7 показывают, что множество $f([a;b])$ замкнуто и ограничено, а предложение 5.4 показывает, что это множество является интервалом; однако всякий замкнутый в $\mathbb{R}$ и ограниченный интервал является отрезком. $\square$

Перейдем ко второй теме.

Следующее определение — непосредственное обобщение определения 3.1.

Определение 5.9. Пусть (X, ρ) — метрическое пространство. Последовательность его точек $x_n \in X$ называется *фундаментальной*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $N \in \mathbb{N}$, что при всех $m, n > N$ выполнено неравенство $\rho(x_m, x_n) < \varepsilon$.

Точно так же, как в лекции 3, доказывается, что если последовательность имеет предел, то она фундаментальна.

Определение 5.10. Метрическое пространство называется *полным*, если в нем всякая фундаментальная последовательность имеет предел.

Вообще говоря, метрическое пространство быть полным вовсе не обязано. Например, интервал $(0;1)$ (с метрикой, индуцированной с $\mathbb{R}$) неполон: последовательность $x_n = 1/n$ фундаментальна (так как она сходится в $\mathbb{R} \supset (0;1)$), но предела в $(0;1)$ не имеет. Из критерия Коши вытекает, что $\mathbb{R}$, тем не менее, полно; легко видеть, что полно и $\mathbb{R}^n$ (в любой из L^p-метрик).

Предложение 5.11. *Пусть X — полное метрическое пространство. Подмножество $Y \subset X$ полно (в индуцированной метрике) в том и только том случае, когда оно замкнуто.*

Доказательство. Если Y замкнуто и $\{y_n\}$ — фундаментальная последовательность в Y, то она сходится к некоторой точке $y \in X$ ввиду полноты X, и $y \in Y$ ввиду замкнутости Y.

Обратно, если Y полно и последовательность его точек $\{y_n\}$ сходится к точке $y \in X$, то последовательность $\{y_n\}$ фундаментальна, а следовательно, ввиду полноты Y, сходится к точке, лежащей в Y. Ввиду единственности предела имеем $y \in Y$. $\square$

Определение 5.12. Пусть X — метрическое пространство. Его *пополнением* называется пара $(\overline{X}, i)$, в которой $\overline{X}$ — полное метрическое пространство, $i\colon X \to \overline{X}$ — вложение, сохраняющее расстояния, и замыкание подмножества $i(X) \subset \overline{X}$ совпадает со всем $\overline{X}$.

Часто пополнением называют не пару $(\overline{X}, i)$, а пространство $\overline{X}$, поскольку отображение i обычно ясно из контекста.

Основное свойство пополнений состоит в том, что пополнение всегда существует и единственно. Точнее говоря:

Теорема 5.13. *У всякого метрического пространства (X, ρ) существует пополнение; если $(\overline{X}_1, i_1)$ и $(\overline{X}_2, i_2)$ — два пополнения пространства (X, ρ), то существует и единственно такое взаимно-однозначное сохраняющее расстояния отображение $\varphi\colon \overline{X}_1 \to \overline{X}_2$, что $\varphi \circ i_1 = i_2$.*

Примером пополнения может послужить любая пара, состоящая из полного метрического пространства $\overline{X}$ и вложения в него его «плотного» подмножества X (подмножество в топологическом пространстве называется плотным, если его замыкание совпадает со всем пространством). Например, $\mathbb{R}$ является пополнением $\mathbb{Q}$.

Доказательство теоремы 5.13 очень похоже на то, что мы делали при построении действительных чисел. Именно, мы определим $\overline{X}$ как множество классов эквивалентности фундаментальных последовательностей, где фундаментальные последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ называются эквивалентными, если $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n) = 0$ (то, что это действительно отношение эквивалентности, проверяется так же, как в лекции 3).

Лемма 5.14. *Если $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ — две фундаментальные последовательности в метрическом пространстве, то существует предел $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n)$.*

Доказательство. В силу критерия Коши достаточно установить, что последовательность $\rho(x_n, y_n)$ фундаментальна. Поскольку для любых четырех точек a, b, c и d в метрическом пространстве имеем $\rho(a, d) \leqslant \rho(a, b) + \rho(b, c) + \rho(c, d)$ («сторона четырехугольника не превосходит суммы трех других его сторон»), выполнено неравенство

$$|\rho(x_m, y_m) - \rho(x_n, y_n)| \leqslant \rho(x_m, x_n) + \rho(y_m, y_n);$$

в правой части оба слагаемых стремятся к нулю при $m, n \to \infty$, что и доказывает фундаментальность. $\square$

Имея в виду лемму 5.14, определим расстояние между двумя элементами $\overline{X}$, представленными последовательностями $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$, как $\lim \rho(x_n, y_n)$; без труда проверяется, что так определенное расстояние не зависит от выбора представителя в классе эквивалентности.

Сохраняющее расстояния вложение $i\colon X \to \overline{X}$ определим так же, как в лекции 3, сопоставив точке $x \in X$ класс эквивалентности последовательности $\{x_n\}$, в которой $x_n = x$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Точно так же, как предложение 3.7, доказывается тот факт, что X плотно в $\overline{X}$, и точно так же, как критерий Коши 3.7, доказывается, что $\overline{X}$ полно (заключительное рассуждение: если $\lim_{n\to\infty} r_n = \alpha$ и $\lim_{n\to\infty} \rho(\alpha_n, r_n) = 0$, то $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha$, что немедленно следует из неравенства треугольника).

Доказательство заключительного утверждения теоремы 5.13 проделайте самостоятельно (указание: если $\alpha \in \overline{X}_1$ и $\alpha = \lim i_1(x_n)$, то положим $\phi(\alpha) = \lim i_2(x_n)$.)

Следствие 5.15. *Всякое компактное метрическое пространство является полным.*

Доказательство. Пусть X — компактное метрическое пространство; вложим его в пополнение $\overline{X}$. Тогда X замкнуто в $\overline{X}$ ввиду компактности, так что $\overline{X}$, будучи замыканием X, обязано с X совпадать. Следовательно, $X = \overline{X}$ полно. □