Лекция 7. Канторово множество

А теперь построим топологическое пространство, на первый взгляд никакого отношения к p-адическим числам не имеющее.

Именно, разобьем отрезок $[0;1] \subset \mathbb{R}$ на три равные части и удалим среднюю из них как открытый интервал $(1/3;2/3)$; останется объединение двух отрезков $[0;1/3] \cup [2/3;1]$. Каждый из оставшихся отрезков длины $1/3$ также разобьем на три равные части и удалим из каждого из них средний открытый интервал; с каждым из оставшихся отрезков длины $1/3^2$ проделаем ту же операцию, и так до бесконечности. Обозначим через $C \subset [0;1]$ множество, оставшееся от отрезка после удаления всех этих открытых интервалов; это множество называется *канторовым множеством.*

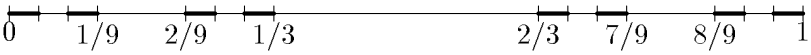

Рис. 7.1. Канторово множество

Каковы же свойства канторова множества C? Из самогó построения вытекает, что C состоит из тех и только тех чисел, которые можно записать в виде бесконечной троичной дроби вида $\overline{0{,}a_1a_2a_3\ldots}$, в которой все a_j равны 0 или 2. (В частности, C имеет мощность континуум.) Заметим, что представление числа $x \in C$ в виде дроби такого вида единственно (поскольку при замене $0222\ldots$ на $1000\ldots$ в троичной записи появляется запрещенная цифра 1). Далее, C замкнуто (так как получено удалением из замкнутого множества объединения открытых интервалов) и ограничено; следовательно, оно компактно. Заметим, что C вполне несвязно: если $\alpha, \beta \in C$, и $\alpha < \beta$, то троичные разложения чисел α и β имеют вид $\alpha = 0{,}\overline{a_1,\ldots,a_k}0\ldots$ и $\beta = 0{,}\overline{a_1,\ldots,a_k}2\ldots$ для некоторого натурального k, и легко видеть, что число $0{,}\overline{a_1,\ldots,a_k}11$ не лежит в C и расположено между α и β.

Прежде чем двигаться дальше, расскажем об одной важной общей конструкции.

Бесконечные произведения пространств

Объясним, как определить произведение произвольного (в том числе и бесконечного) семейства топологических пространств.

Пусть $\{X_i\}_{i\in I}$ — семейство топологических пространств, занумерованное «индексами» из множества I (возможно, бесконечного). Согласно общим определениям теории множеств, их произведение *как множество* представляет собой множество всевозможных наборов $\{x_i\}_{i\in I}$, где $x_\alpha \in X_\alpha$ для всякого $\alpha \in I$. (Если, скажем, $I = \{1, 2\}$, то получается множество всевозможных пар (x_1, x_2), где $x_1 \in X_1$ и $x_2 \in X_2$, то есть обычное декартово произведение двух множеств.) Обозначается такое произведение $\prod_{i\in I} X_i$.

Как же задать топологию на пространстве $X = \prod_{i\in I} X_i$, чтобы она была связана с топологиями «сомножителей» X_i?

На любом произведении множеств $\prod_{i\in I} X_i$ определены (для всякого $\alpha \in I$) отображения проекции $\mathrm{pr}_\alpha \colon \prod_{i\in I} X_i \to X_\alpha$, ставящие в соответствие набору $\{x_i\}_{i\in I}$ элемент $x_\alpha \in X_\alpha$. Естественно по крайней мере потребовать, чтобы эти отображения были непрерывны.

Впрочем, условие непрерывности проекций топологию на произведении однозначно не определяет: если, например, задать на нем дискретную топологию, то все проекции (и вообще все отображения из этого произведения куда бы то ни было) заведомо будут непрерывны, но о связи топологии произведения с топологиями сомножителей речи при этом не будет. Попробуем поэтому определить топологию на произведении наиболее экономным способом, чтобы набор открытых множеств был наименьшим возможным, при котором непрерывность всех проекций еще имеет место (как говорят, определим на произведении «наименее тонкую топологию, при которой проекции непрерывны»).

Именно, если проекция $\mathrm{pr}_\alpha \colon X \to X_\alpha$ непрерывна, то для всякого открытого подмножества $U_\alpha \subset X_\alpha$ его прообраз $\mathrm{pr}_\alpha^{-1}(U_\alpha)$ должен быть открыт в X; далее, поскольку пересечение конечного числа открытых множеств также открыто, открытыми должны быть и всевозможные конечные пересечения множеств такого вида. Оказывается, что этого уже и достаточно:

Предложение-определение 7.1. Пусть $\{X_i\}_{i\in I}$ — семейство топологических пространств. Для каждого конечного подмножества $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \subset I$ и каждого набора подмножеств $U_1, \ldots, U_n$, где $U_j \subset X_{\alpha_j}$ — открытое подмножество, рассмотрим подмножество

$$\mathrm{pr}_{\alpha_1}^{-1}(U_1) \cap \ldots \cap \mathrm{pr}_{\alpha_n}^{-1}(U_n) \subset \prod_{i\in I} X_i. \tag{7.1}$$

Тогда всевозможные множества вида (7.1) образуют базу топологии в $\prod_{i\in I} X_i$; эта топология называется топологией произведения.

Проверка того, что множества вида (7.1) действительно образуют базу топологии, тривиальна, поскольку пересечение двух множеств вида (7.1) также является множеством вида (7.1). Если множество индексов I конечно, то определение 7.1 дает, очевидно, ту же топологию, что в определении 4.12. Неформально множества вида (7.1) можно описать так: конечное число компонент в «векторе» $\{x_i\}_{i\in I}$ могут произвольно варьироваться в открытых подмножествах, а на все остальные компоненты никаких условий не накладывается.

Нетрудно показать, что в произведениях (в том числе и бесконечных) сохраняется хаусдорфовость:

Предложение 7.2. *Если все пространства X_i хаусдорфовы, то и произведение $\prod_{i\in I} X_i$ хаусдорфово.*

Доказательство. Положим $X = \prod_{i\in I} X_i$, и пусть $\mathbf{x} = \{x_i\}_{i\in I}$ и $\mathbf{y} = \{y_i\}_{i\in I}$ — два различных элемента пространства X. Тогда $x_\alpha \neq y_\alpha$ для некоторого $\alpha \in I$. Так как X_α хаусдорфово, существуют такие непересекающиеся открытые множества $U, V \subset X_\alpha$, что $U \ni x_\alpha$ и $V \ni y_\alpha$. Множества $\mathrm{pr}_\alpha^{-1}(U)$ и $\mathrm{pr}_\alpha^{-1}(V)$ открыты в X, не пересекаются и содержат $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ соответственно. $\square$

Предыдущее предложение было более или менее очевидно. Гораздо интереснее следующее обобщение предложения 4.13:

Предложение 7.3 (теорема Тихонова). *Если все пространства X_i компактны, то и произведение $\prod_{i\in I} X_i$ компактно.*

Доказательство теоремы Тихонова не очень сложно, но мы его опустим. В примерах бесконечных произведений компактных пространств, которые встретятся нам ниже, компактность этих произведений будет установлена непосредственно.

Примеры бесконечных произведений

Даже если топология на каждом из сомножителей дискретна, топология на их бесконечном произведении дискретной уже не будет. Зафиксируем, например, конечное множество S, содержащее более одного элемента; будем рассматривать его как топологическое пространство с дискретной топологией и обозначим через X произведение счетного числа экземпляров этого пространства, т. е. множество всевозможных бесконечных последовательностей $\{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$, где все $a_j \in S$. Базу топологии на X образуют множества таких последовательностей, в которых конечное число членов зафиксировано, а остальные произвольны (в частности, все эти открытые множества имеют мощность континуум, так что пространство X не имеет изолированных точек). Другая возможная база топологии состоит из множеств вида

$$U_{a_1,\ldots,a_n} = \{(x_1, x_2, \ldots) \mid x_i = a_i \text{ при } 1 \leqslant i \leqslant n\} \tag{7.2}$$

(для всевозможных n и всевозможных $a_1, \ldots, a_n \in S$). Если обычным образом отождествить $\mathbb{Z}_p$ с множеством бесконечных последовательностей элементов множества $\{0, 1, \ldots, p-1\}$, то эта база топологии на произведении счетного количества экземпляров множества $\{0, 1, \ldots, p-1\}$ совпадет с семейством всех открытых шаров в $\mathbb{Z}_p$. Стало быть, *$\mathbb{Z}_p$ гомеоморфно произведению счетного числа дискретных p-элементных пространств.* Поскольку $\mathbb{Z}_p$ компактно, компактно и это произведение — в согласии с теоремой Тихонова.

Далее, обозначим через X произведение счетного числа двухэлементных множеств $\{0, 2\}$ (с дискретной топологией на сомножителях) и обозначим через $f\colon X \to C$ отображение из X в канторово множество, переводящее последовательность $a_1, a_2, \ldots$ в бесконечную троичную дробь $0{,}\overline{a_1a_2\ldots}$; ясно, что, во-первых, f взаимно однозначно, и, во-вторых, f и f^{-1} непрерывны. Стало быть канторово множество гомеоморфно $\mathbb{Z}_2$. На самом деле *все* $\mathbb{Z}_p$ гомеоморфны канторову множеству и друг другу. Мы получим этот факт в следующем пункте как следствие более общего утверждения.

Пути на бесконечном дереве

Назовем *бесконечным деревом* бесконечный граф, устроенный следующим образом. Одна из вершин, называемая корнем, в графе выделена, а все остальные разбиты в несвязное объединение конечных множеств $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ (для всех $n \in \mathbb{N}$); вершины, входящие в множество X_k, мы будем называть *вершинами k-го уровня.* Корень соединен ребром с каждой из вершин первого уровня, и каждая вершина k-го уровня соединена ребром с какими-то вершинами $k+1$-го уровня. При этом при $k \geqslant 2$ каждая вершина k-го уровня соединена ровно с одной вершиной $k-1$-го уровня (своим *родителем*) — см. рис. 7.2.

Обозначим через X множество, состоящее из всевозможных путей в дереве, начинающихся в корне и проходящих через вершины всех уровней. Сейчас мы введем на X топологию и покажем, что (при небольших дополнительных предположениях) X с в этой топологией гомеоморфно канторову множеству, а также всем $\mathbb{Z}_p$. Предварительно, однако, дадим более формальное («теоретико-множественное») описание пространства

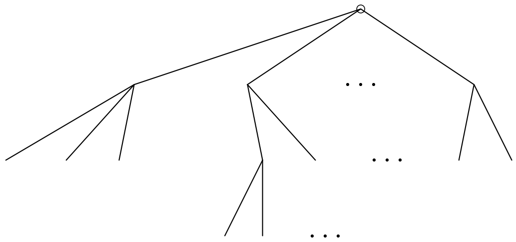

Рис. 7.2. Бесконечное дерево

путей в дереве. Именно, обозначим через $f_i\colon X_i \to X_{i-1}$ определенное при каждом $i > 1$ отображение, ставящее в соответствие вершине ее родителя. Тогда, очевидно,

$$X = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) \in \prod_{j=1}^{\infty} X_j \mid f_j(x_j) = x_{j-1} \quad \text{для всех } j > 1\}.$$

(По-ученому множество X называется проективным пределом множеств X_j относительно отображений f_j.) Топологию на X определим как индуцированную с $\prod_{j=1}^{\infty} X_j$, где топология на каждом X_j дискретна. База топологии (7.2) индуцирует базу топологии на Y, в терминах путей на дереве описывающуюся следующим образом: базу образуют множества путей, в которых начальный участок зафиксирован, а далее можно идти как угодно.

Заметим, что произведение $\prod_{i=1}^{\infty} A_i$, где все A_i — конечные множества с дискретной топологией, гомеоморфно пространству путей в бесконечном дереве, в котором из корня выходит $\mathrm{card}(A_1)$ ребер, из каждой вершины первого уровня — $\mathrm{card}(A_2)$ ребер, и т. д. (через $\mathrm{card}(A)$ обозначается количество элементов в множестве A).

Предложение 7.4. *Если в бесконечном дереве из каждой вершины (включая корень) выходит не менее двух ребер, ведущих в вершины следующего уровня, то пространство путей в этом дереве гомеоморфно канторову множеству.*

(Напомним на всякий случай, что число ребер, выходящих из каждой вершины, конечно.)

Доказательство. Достаточно доказать, что пространство путей Y гомеоморфно пространству X бесконечных последовательностей из нулей и единиц.

Для всякого целого $k > 1$ рассмотрим следующую последовательность k слов над алфавитом[3] $\{0, 1\}$:

$$R_k = \langle 0,\ 10,\ 110,\ \ldots, \underbrace{1\ldots1}_{k-2}0,\ \underbrace{1\ldots1}_{k-1}\rangle$$

(для ясности: $R_2 = \langle 0, 1\rangle$, $R_3 = \langle 0, 10, 11\rangle$). Очевидно, что ни одно из слов, входящих в множество R_k, не является начальным отрезком другого и что для любой бесконечной последовательности $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ из нулей и единиц существует и единственно такое $m \in \mathbb{N}$, что ее начальный отрезок $(x_1, \ldots, x_m)$ входит в R_k.

Построим теперь взаимно обратные отображения $f\colon Y \to X$ и $g\colon X \to Y$. Отображение f строится так. Для каждой вершины дерева, включая корень, пронумеруем каким-либо образом ее потомков (т. е. вершины следующего уровня, соединенные с ней ребром). Каждый путь $\xi \in Y$ проходит через одну вершину нулевого уровня, одну вершину первого уровня, и т. д.; поставим ему в соответствие последовательность пар натуральных чисел $(k_1, a_1), (k_2, a_2), \ldots$, где k_i — число потомков вершины $i-1$-го уровня, через которую проходит путь, а a_i — номер того из потомков вершины $i-1$-го уровня, через которую проходит путь; этой последовательности пар, в свою очередь, сопоставим такую последовательность из нулей и единиц: слово номер a_1 из R_{k_1}, за ним встык слово номер a_2 из R_{k_2}, и т. д. Это и будет $f(\xi) \in X$.

Обратно, пусть $\eta \in X$ — бесконечная последовательность из нулей и единиц. Поставим ей в соответствие такой путь в бесконечном дереве. Пусть из корня исходит k_1 ребер в вершины первого уровня; найдем в последовательности η начальный отрезок, входящий в R_{k_1} (по построению он существует и единственен); если это слово стоит в R_{k_1} на месте номер a_1, пройдем из корня в его вершину-потомок номер a_1, а найденный начальный отрезок из последовательности η удалим. Последовательность из нулей и единиц, оставшуюся после удаления этого отрезка, обозначим η_1.

Пусть теперь из вершины первого уровня, в которую мы пришли, исходит k_2 ребер, соединяющих ее с вершинами второго уровня; найдем в последовательности η_1 начальный отрезок, входящий в R_{k_2}, обозначим его номер в этой последовательности через a_2 и продолжим наш путь, перейдя в вершину второго уровня, имеющую номер a_2 среди потомков вершины первого уровня, в которую мы пришли перед этим; найденный

[3] Словом над алфавитом $\{0, 1\}$ называется конечная последовательность из нулей и единиц.

начальный отрезок из η_1 удалим, и так далее. Продолжая по индукции, получим некоторый путь в бесконечном дереве — это и есть $g(\eta)$.

Из построения ясно, что f и g — взаимно обратные биекции и что они непрерывны. Следовательно, Y и X гомеоморфны. $\square$

Следствие 7.5. *Пусть для каждого $i \in \mathbb{N}$ задано конечное множество A_i, содержащее более одного элемента; зададим на каждом из A_i дискретную топологию. Тогда пространство $Y = \prod_{i\in\mathbb{N}} A_i$ гомеоморфно канторову множеству. В частности, канторову множеству гомеоморфно всякое кольцо целых p-адических чисел $\mathbb{Z}_p$.*

Теорема 7.6. *Пусть K — компактное метрическое пространство. Тогда существует непрерывное сюръективное отображение $f\colon X \to K$, где X — канторово множество.*

Доказательство. Заметим, что если K — произвольное компактное метрическое пространство и $\varepsilon > 0$, то K представимо в виде объединения конечного числа непустых замкнутых подмножеств диаметра $\leqslant \varepsilon$ (*диаметром* подмножества метрического пространства называется верхняя грань расстояний между его точками). В самом деле, K покрывается конечным числом открытых шаров радиуса $\varepsilon/2$, и в качестве искомых замкнутых подмножеств можно взять замкнутые шары с теми же центрами и радиусами.

Имея в виду это наблюдение, зафиксируем стремящуюся к нулю последовательность положительных чисел $\{\varepsilon_n\}$. Теперь представим наше пространство K в виде объединения конечного числа множеств диаметра $\leqslant \varepsilon_1$ (назовем их подмножествами первого уровня); каждое подмножество первого уровня также компактно, так что его можно представить в виде конечного объединения замкнутых подмножеств диаметра $\leqslant \varepsilon_2$ (назовем их подмножествами первого уровня); каждое подмножество второго ранга представим в виде конечного объединения замкнутых подмножеств диаметра $\leqslant \varepsilon_3$, и т. д.

Построим исходя из этих разбиений следующее бесконечное дерево. Каждому подмножеству первого ранга сопоставим вершину первого уровня. Если подмножество первого ранга, соответствующее вершине первого уровня v, представимо в виде объединения подмножеств второго уровня $V_1, \dots, V_k$, то сопоставим им k вершин второго уровня $v_1, \dots, v_k$ и соединим v с каждой из v_k, и т. д. (Если покрытие какого-то из множеств состоит только из одного множества следующего уровня, посчитаем это множеств дважды, чтобы дерево удовлетворяло условиям теоремы 7.4).

Пусть X — пространство путей в построенном дереве. Заметим, что пересечение замкнутых подмножеств в K, соответствующих вершинам, встречающимся на этом пути, состоит ровно из одной точки. В самом деле, пересечение последовательности вложенных непустых компактных подмножеств $K_1 \supseteq K_2 \supseteq \ldots$: пересечение любого конечного набора множеств K_i непусто, так что объединение любого конечного набора открытых множеств вида $K \setminus K_i$ не является покрытием пространства K, так что ввиду компактности K все множества $K \setminus K_i$ не могут образовывать его покрытия; далее, поскольку диаметры множеств K_i стремятся к нулю, непустое множество $\bigcap_{i=1}^{\infty} K_i$ состоит из одной точки, что и утверждалось. Положим $f(x)$ равным этой точке.

Отображение f сюръективно, так как всякая точка $y \in K$ содержится в каком-то множестве первого уровня, в каком-то лежащем в нем множестве второго ранга и т. д.; оно непрерывно, так как два пути, у которых первые m звеньев совпадают, соответствуют точкам, находящиеся на расстоянии $\leqslant \varepsilon_m$. □

Следствие 7.7. *Мощность компактного метрического пространства не превосходит мощности континуума.*

С помощью аналогичных рассуждений можно также показать, что всякое компактное и вполне несвязное метрическое пространство без изолированных точек гомеоморфно канторову множеству.