Лекция 9. Равномерная сходимость; равномерная непрерывность

Пусть $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — последовательность функций (скажем, с вещественными значениями) на каком-то множестве X. Предположим, что для всякой точки $x \in X$ существует предел $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$. Обозначим этот предел $f(x)$, тогда у нас получится функция $f\colon X \to \mathbb{R}$; как говорят, последовательность функций $\{f_n\}$ *поточечно сходится* к функции f:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \qquad \text{для всех } x \in X. \tag{9.1}$$

Расшифровывая определение предела последовательности, получаем, что соотношение (9.1) означает следующее: для любого $\varepsilon > 0$ и для любого $x \in X$ существует такое $n \in \mathbb{N}$, что при всех $n > N$ имеем $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. При этом N может (при фиксированном ε) зависеть от x: если $X = [0; 1]$ и функция f_n имеет график как на рис. 9.4, то $f(x)$ равно нулю при $x \neq 0$ и единице при $x = 0$ и, скажем, при $\varepsilon = 0{,}1$ не существует такого N, которое годилось бы для всех $x \in [0; 1]$. Сходимость называется равномерной, если от этой зависимости N от x можно уйти:

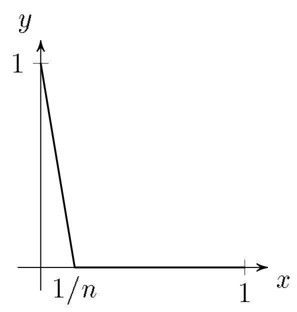

Рис. 9.4. $y = f_n(x)$

Определение 9.1. Пусть X — произвольное множество, Y — метрическое пространство. Говорят, что последовательность отображений $f_n\colon X \to Y$ является *равномерно сходящейся* (иногда добавляют для ясности: равномерно сходящейся на X) к отображению $f\colon X \to Y$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $N \in \mathbb{N}$, что при всех $n > N$ имеем $\rho(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$.

Из нашего обсуждения ясно, что, если последовательность отображений $\{f_n\}$ равномерно сходится к отображению f, то имеет место и поточечная сходимость: для всякого $x \in X$ имеем $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$. Обратное, как мы только что видели, неверно.

Мы только что видели, что поточечный предел последовательности непрерывных функций может иметь разрывы. С равномерно сходящейся последовательностью эта патология невозможна:

Теорема 9.2. *Пусть X — топологическое пространство, Y — метрическое пространство, и пусть $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — последовательность отображений из X в Y, равномерно сходящаяся к отображению $f\colon X \to Y$. Если все $f_n\colon X \to Y$ непрерывны, то и предельное отображение $f\colon X \to Y$ непрерывно.*

Доказательство. Во-первых, отметим, что $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ для всех $x \in X$ — это мы уже обсуждали. Чтобы доказать непрерывность функции f, зададимся, согласно определению, числом $\varepsilon > 0$, и пусть $x \in X$. Нам надо доказать, что $\rho(f(x), f(y)) < \varepsilon$ для всех y, «достаточно близких» к x (то есть лежащих в некотором открытом подмножестве $U \ni x$). Чтобы оценить расстояние между $f(x)$ и $f(y)$, мы доберемся от $f(x)$ до $f(y)$ за три шага.

Во-первых, в силу равномерной сходимости найдется такое $n \in \mathbb{N}$, что при всех $n > N$ и при всех $z \in X$ имеем $\rho(f(z), f_n(z)) < \varepsilon/3$. Далее, зафиксируем какое-нибудь $n > N$. Ввиду непрерывности функции f_n найдется такое открытое множество $U \ni x$, что $\rho(f_n(x), f_n(y)) < \varepsilon/3$ при всех $y \in U$. Покажем, что для всех $y \in U$ имеем $\rho(f(x), f(y)) < \varepsilon$. В самом деле:

$$\begin{aligned}\rho(f(x), f(y)) \leqslant \rho(f(x), f_n(x)) + \rho(f_n(x), f_n(y)) + \rho(f(y), f_n(y)) <\\ < \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon\end{aligned}$$

(первое и третье слагаемые меньше $\varepsilon/3$, так как $\rho(f(z), f_n(z)) < \varepsilon/3$ вообще для всех z). Это доказывает искомую непрерывность. □

Взглянем теперь на равномерную сходимость «с научной точки зрения». Пусть X — топологическое пространство и $B(X)$ — векторное пространство ограниченных функций $f\colon X \to \mathbb{R}$ (функция f, определенная на множестве X, называется ограниченной, если существует такое $M > 0$, что $|f(x)| \leqslant M$ для всех $x \in X$). Для всякой $f \in B(x)$ положим $\|f\| = \sup_{x\in X} |f(x)|$. Неотрицательное число $\|f\|$ называется *нормой* функции f (точнее говоря, sup-нормой, но другие нормы нам в ближайшее время не встретятся).

Можно также дословно повторить эти определения, считая, что $B(X)$ — множество ограниченных функций со значениями в поле комплексных чисел $\mathbb{C}$ (а не обязательно в $\mathbb{R}$). Мы не будем вводить для этого случая отдельное обозначение; если для справедливости какого-то утверждения существенно, чтобы функции были со значениями именно в $\mathbb{R}$ (или в $\mathbb{C}$), мы будем это явно указывать.

Sup-норма обладает следующими свойствами:

Предложение 9.3. *1) Пусть $f \in B(X)$. Тогда $\|f\| = 0$ если и только если функция f равна нулю тождественно.*

2) Если $f \in B(X)$ и λ — константа, то $\|\lambda f\| = |\lambda| \cdot \|f\|$.

3) Если $f, g \in B(X)$, то $\|f + g\| \leqslant \|f\| + \|g\|$.

4) Если $f, g \in B(X)$, то $\|fg\| \leqslant \|f\| \cdot \|g\|$.

Доказательства всех этих утверждений можно спокойно предоставить читателю.

Если ввести на множестве $B(X)$ метрику по формуле $\rho(f, g) = \|f - g\|$, то $B(X)$ превратится в метрическое пространство.

Из самого определения sup-нормы вытекает, что последовательность функций $f_n \in B(X)$ сходится к функции $f \in B(X)$ в топологии, определяемой sup-нормой, тогда и только тогда, когда эта последовательность сходится к f равномерно на X.

Предложение 9.4. *Пространство $B(X)$ является полным.*

Доказательство. Пусть $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — фундаментальная последовательность ограниченных функций. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $n \in \mathbb{N}$, что

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leqslant \varepsilon \qquad \text{для любого } x \in X \text{ и любых } m, n > N. \tag{9.2}$$

Следовательно, для любого $x \in X$ последовательность чисел $\{f_n(x)\}$ фундаментальна и тем самым сходится. Положим $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$. Покажем, что $f \in B(X)$ и что последовательность $\{f_n\}$ равномерно сходится к f.

Начнем со второго утверждения. Для заданного $\varepsilon > 0$ найдем n как в соотношении (9.2); зафиксировав $n > N$ и перейдя в этом неравенстве к пределу при $m \to \infty$, получим, что

$$|f(x) - f_n(x)| \leqslant \varepsilon \qquad \text{для любого } x \in X. \tag{9.3}$$

Ввиду произвольности выбора $n > N$, это доказывает равномерную сходимость.

Далее, для того же ε и фиксированного $n \in \mathbb{N}$ неравенство (9.3) влечет $|f(x)| \leqslant |f_n(x)| + \varepsilon$ для всякого $x \in X$. Отсюда $|f(x)| \leqslant \|f_n\| + \varepsilon$ для всякого x, и функция f ограничена. Все доказано. □

До сих пор мы никак не пользовались тем обстоятельством, что X — топологическое пространство, и все сказанное было бы верно и для случая, когда X — произвольное множество. Теперь введем, однако, такое

Обозначение 9.5. Пусть X — топологическое пространство. Через $C(X)$ обозначается множество всех непрерывных и ограниченных функций на X.

Заметим, что множество $C(X) \subset B(X)$ наследует из $B(X)$ норму, метрику и топологию. Заметим также, что, если X компактно, можно определить $C(X)$ просто как множество непрерывных функций на X.

Предложение 9.6. *Пространство $C(X)$ замкнуто в $B(X)$ и полно.*

Доказательство. Замкнутость вытекает из теоремы 9.2, полнота вытекает из того, что замкнутое подмножество полного метрического пространства будет, очевидно, полным в индуцированной метрике. □

К понятию равномерной сходимости идейно близко еще одно важное общеаналитическое понятие: равномерная непрерывность.

Определение 9.7. Пусть $f\colon X \to Y$ — отображение метрических пространств. Это отображение называется *равномерно непрерывным*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что $\rho(f(x), f(y)) < \varepsilon$, как только $\rho(x, y) < \delta$.

Ясно, что каждое равномерно непрерывное отображение является непрерывным; обратное, вообще говоря, неверно (пример: $X = Y = (0; +\infty)$ и $f(x) = 1/x$). Тем не менее:

Теорема 9.8. *Пусть X и Y — метрические пространства. Если X компактно и $f\colon X \to Y$ — непрерывное отображение, то f равномерно непрерывно.*

Доказательство. Зададимся числом $\varepsilon > 0$ и для каждого $a \in Y$ рассмотрим множество $f^{-1}(B_{\varepsilon/2}(a)) \subset X$. Эти множества образуют открытое покрытие пространства X. Поскольку X компактно, существует «лебегово число» $\delta > 0$, с тем свойством, что для всякого $x \in X$ шар $B_\delta(x)$ содержится в одном из множеств $f^{-1}(B_{\varepsilon/2}(a))$ (лемма 4.20). Поскольку, очевидно, $\rho(f(x), f(y)) < \varepsilon$, как только x и y содержатся в одном и том же $f^{-1}(B_{\varepsilon/2}(a))$, число δ — искомое. □