Анализ, листок 1 (осень 2006, 1 семестр)

Мы будем предполагать известными свойства действительных чисел и элементарных функций, входящие в школьную программу, а также определение и основные свойства пределов функции и последовательности. Кроме того, можно пользоваться следующим фактом: *всякая монотонно возрастающая ограниченная последовательность имеет предел.*

1. Докажите, что при целых $n > 0$ и при $x > -1$ выполнено неравенство $(1+x)^n \geqslant 1 + nx$.

2. а) Докажите, что $\lim_{n\to\infty} q^n = \infty$ при $q > 1$ и $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$ при $-1 < q < 1$.

б) Что можно сказать про $\lim_{n\to\infty} z^n$ при различных $z \in \mathbb{C}$?

3. а) Докажите, что последовательность $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ является монотонно возрастающей, а $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ — монотонно убывающей.

б) Докажите, что существует предел $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ (этот предел называется числом e).

4. Найдите следующие пределы:

а) $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$;

б) $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n}$;

в) $\lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}$.

5. Докажите, что $\lim_{n\to\infty}(n^a/b^n) = 0$ для всяких $a > 0$, $b > 1$.

6. Докажите, что $\lim_{n\to\infty}(n^a)/(\ln n) = +\infty$ для всякого $a > 0$.

7. Докажите, что $\lim_{n\to\infty} a^n/n! = 0$ при $a > 1$.

8. Найдите $\lim_{n\to\infty} n!/n^n$

Найдите пределы следующих последовательностей:

9. $(n+1)^{2006}/(n^{2006}+1)$;

10. $\sqrt[n]{n}$;

11. $\sqrt[n]{\frac{2^n+3^n+4^n}{5^n+6^n}}$.

12. Последовательность $\{x_n\}$ задана соотношениями $x_1 = 1$, $x_{n+1} = \sqrt{2+x_n}$. Докажите, что она имеет предел, и найдите его.

13. Существует ли предел $\lim_{n\to\infty} \sin n$?

14. Последовательность $\{x_n\}$ задана соотношениями $x_1 = 1/2$, $x_{n+1} = x_n - x_n^2$.

а) Докажите, что существует $\lim_{n\to\infty} x_n$, и найдите этот предел.

б) Найдите α, для которого предел $\lim_{n\to\infty} n^\alpha x_n$ существует и не равен нулю, и вычислите этот предел.