Анализ, листок 2 (осень 2006, 1 семестр)

Топологические пространства и непрерывность

1. Пусть X — топологическое пространство, и пусть $f, g\colon X \to \mathbb{R}$ — непрерывные функции. Докажите, что их произведение $fg\colon X \to \mathbb{R}$ тоже непрерывно.

2. Что такое непрерывное отображение из множества $\{0, 1, 1/2, 1/3, \ldots\}$ в $\mathbb{R}$?

3. Пусть T — пространство треугольников на плоскости, определенное в лекции 1. Покажите, что следующие отображения непрерывны:

а) $S\colon T \to \mathbb{R}$, ставящее в соответствие треугольнику его площадь.

б) $B\colon T \to \mathbb{R}^2$, ставящее в соответствие треугольнику его точку пересечения медиан.

в) $O\colon T \to \mathbb{R}^2$, ставящее в соответствие треугольнику его точку пересечения высот.

4. Пространство $\overline{\mathbb{R}^n}$ определяется как $\mathbb{R}^n$, к которому добавлена точка ∞. Подмножество $U \subset \overline{\mathbb{R}^n}$ называется открытым, если, во-первых, $U \cap \mathbb{R}^n$ открыто в $\mathbb{R}^n$, и во-вторых, в случае, когда $U \ni \infty$, U содержит и множество вида $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| > R\}$ для некоторого $R > 0$. Докажите, что $\overline{\mathbb{R}^n}$ гомеоморфно единичной сфере в $\mathbb{R}^{n+1}$.

5. Пусть X и Y — топологические пространства, $X \times Y$ — их декартово произведение (т. е. множество упорядоченных пар (x, y), где $x \in X$, $y \in Y$).

а) Покажите, что семейство подмножеств $U \times V \subset X \times Y$, где $U \subset X$ и $V \subset Y$ открыты, образует базу некоторой топологии на $X \times Y$ и что проекции $X \times Y$ на оба сомножителя непрерывны относительно этой топологии.

Топология, о которой идет речь в пункте (а), называется *топологией произведения.*

б) Покажите, что топология произведения на $X \times Y$ является наименее тонкой топологией, относительно которой обе проекции непрерывны. (Если на одном множестве заданы две топологии, то говорят, что первая из них более тонкая, чем вторая, если всякое множество, открытое во второй топологии, открыто и в первой.)

в) Покажите, что $\mathbb{R}^n$ гомеоморфно $\underbrace{\mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}}_{n \text{ раз}}$ (определение произведения n пространств придумайте самостоятельно).

6. Пусть X — топологическое пространство, R — отношение эквивалентности на X, пусть X/R — множество классов эквивалентности и $\pi\colon X \to X/R$ — стандартное отображение (элемент множества переходит в содержащий его класс). Назовем подмножество $U \subset X/R$ *открытым*, если $\pi^{-1}(U)$ открыто в X.

а) Покажите, что такой выбор открытых множеств превращает X/R в топологическое пространство и что отображение π при этом непрерывно.

(X/R с такой топологией называется факторпространством, а указанная топология на X/R — фактортопологией.)

б) Покажите, что фактортопология — наиболее тонкая топология на X/R, в которой отображение π непрерывно.

7. а) Пусть $M \subset (\mathbb{R}^2)^3$ — множество упорядоченных троек точек, не лежащих на одной прямой (и тем самым, в частности, различных). Назовем две тройки точек из M эквивалентными, если они отличаются только порядком точек. Покажите, что фактор пространства M по этому отношению эквивалентности гомеоморфен пространству T треугольников.

б) Введем на отрезке такое отношение эквивалентности: концы отрезка эквивалентны друг другу, а каждая из остальных точек эквивалентна только сама себе. Докажите, что фактор отрезка по этому отношению гомеоморфен окружности.

в) Введем на $\mathbb{R}^2$ отношение эквивалентности $(x, y) \sim (y, x)$. Покажите, что фактор $\mathbb{R}^2$ по этому отношению гомеоморфен множеству $\{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid v \geqslant 0\}$.

г) Рассмотрим на $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ следующие отношения эквивалентности:

$$R: \quad (x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \Leftrightarrow \exists \lambda > 0: \; x_2 = \lambda x_1, y_2 = \lambda y_1,$$
$$S: \quad (x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \Leftrightarrow \exists \lambda > 0: \; x_2 = \lambda x_1, y_2 = \lambda^{-1} y_1$$

Являются ли хаусдорфовыми пространства $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}/R$ и $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}/S$?

д) Пусть S^1 — окружность на плоскости; назовем две точки из $S^1 \times S^1$ эквивалентными, если они отличаются только перестановкой координат. Докажите, что фактор $S^1 \times S^1$ по этому отношению гомеоморфен листу Мёбиуса.