Анализ, листок 3 (осень 2006, 1 семестр)

Действительные числа

1. Докажите, что для всякого (ограниченного) подмножества $X \subset \mathbb{R}$ его верхняя грань содержится в его замыкании.

2. Пусть $A, B \subset \mathbb{R}$ — два подмножества, обладающие тем свойством, что для всяких $a \in A$ и $b \in B$ выполнено неравенство $a \leqslant b$. Покажите, что существует такое число $x \in \mathbb{R}$, что $a \leqslant x \leqslant b$ для всех $a \in A$ и $b \in B$.

Точка $a \in \mathbb{R}$ называется предельной точкой последовательности $\{x_n\}$, если для всякой окрестности $U \ni a$ существует бесконечно много натуральных чисел n, обладающих тем свойством, что $x_n \in U$ (разумеется, это определение имеет смысл для любого топологического пространства).

3. а) Покажите, что у всякой ограниченной последовательности действительных чисел существуют наибольшая и наименьшаяч предельные точки (эти точки называются верхним и нижним предлами последовательности).

б) Покажите, что последовательность действительных чисел имеет предел тогда и только тогда, когда она ограничена и ее верхний предел равен нижнему.

4. Открытое подмножество в $\mathbb{R}$ содержит все рациональные точки отрезка $[0, 1]$. Обязательно ли это множество содержит весь отрезок $[0, 1]$?

5. Некоторое множество попарно непересекающихся отрезков прямой покрасили в белый цвет. Может ли так случиться, что на любом отрезке есть белая точка? (Точка отрезком не считается.)

6. Покажите, что для всякого замкнутого подмножества $F \subset \mathbb{R}$ существует последовательность, множество предельных точек которой совпадает с F.

7. Найдите замыкание подмножества в $\mathbb{R}$, состоящего из всевозможных чисел вида $m + n\sqrt{2}$, где m и n целые.

8. Существует ли семейство подмножеств в $\mathbb{N}$, имеющее мощность континуум и обладающее тем свойством, что из любых двух множеств этого семейства одно обязательно содержится в другом?

9. Рассмотрим функции из $(0, +\infty)$ в $(0, +\infty)$. Будем говорить, что функция f растёт медленнее функции g (обозначение: $f \ll g$), если $\lim_{x\to+\infty} f(x)/g(x) = 0$.

(а) Верен ли для (частичного) порядка $\ll$ «принцип вложенных отрезков»: если

$$f_1 \ll f_2 \ll \ldots \ll f_n \ll \ldots \ll g_n \ll \ldots \ll g_2 \ll g_1,$$

то найдётся функция h, для которой $f_k \ll h \ll g_k$ при всех k?

(б) Верна ли для порядка $\ll$ «аксиома полноты»: если любая функция из множества A растёт быстрее любой функции из множества B, то найдётся функция, растущая медленнее всех элементов множества A и быстрее всех элементов множества B?