Анализ, листок 5 (осень 2006, 1 семестр)

Полнота

1. Пусть X — полное метрическое пространство; рассмотрим последовательность вложенных друг в друга замкнутых шаров $\overline{B}_{r_1}(a_1) \supset \overline{B}_{r_2}(a_2) \supset \ldots \supset \overline{B}_{r_n}(a_n) \supset \ldots$. Покажите, что если $\lim_{n\to\infty} r_n = 0$ (радиусы стремятся к нулю), то пересечение всех этих шаров непусто и состоит ровно из одной точки.

2. Приведите пример последовательности вложенных замкнутых шаров в полном метрическом пространстве с пустым пересечением.

3. В каждом из следующих примеров выясните, является ли описанное в них метрическое пространство полным; если оно неполно, найдите явное описание для его пополнения.

а) Множество $\mathbb{R}$ с расстоянием $\rho(a,b) = |\operatorname{arctg} a - \operatorname{arctg} b|$.

б) Интервал $(-\pi/2; \pi/2)$ с расстоянием $\rho(a,b) = |\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b|$.

в) l^∞ — множество ограниченных последовательностей; если $a = \{a_n\}$ и $b \in \{b_n\}$,то $\rho(a,b) = \sup|a_n - b_n|$.

г) Ω — множество отрезков на числовой прямой (точки отрезками не считаются); для отрезков $S_1 = [a_1; b_1]$ и $S_2 = [a_2; b_2]$ полагаем $\rho(S_1, S_2) = |a_1 - a_2| + |b_1 - b_2|$.

д) Ω — множество отрезков на числовой прямой (точки отрезками не считаются); для отрезков $S_1, S_2 \in \Omega$ полагаем $\rho(S_1, S_2) = l(S_1 \cup S_2) - l(S_1 \cap S_2)$, где через l обозначена длина отрезка или объединения отрезков (длина одноточечного или пустого множества считается равной нулю). Не забудьте доказать, что функция ρ является метрикой.

4. Покажите, что для подмножества $Z \subset X$, где X — топологическое пространство, следующие два условия эквивалентны:

1) Замыкание Z не имеет внутренних точек.

2) Для всякого непустого открытого $U \subset X$ существует такое непустое открытое $V \subset U$, что $V \cap Z = \varnothing$.

(Множества, удовлетворяющие этим условиям, называются *нигде не плотными*.)

5. Покажите, что множество чисел из отрезка $(0;1)$, в десятичной записи которых не встречается последовательность 142857, является нигде не плотным. (Десятичные записи с бесконечным «хвостом» девяток запрещены.)

6. Покажите, что полное метрическое пространство нельзя представить в виде объединения счетного семейства нигде не плотных множеств («теорема Бэра»).

7. Можно ли множество иррациональных чисел представить в виде объединения счетного семейства замкнутых подмножеств в $\mathbb{R}$?

8. Пусть $\{f_n\}$ — последовательность непрерывных функций на отрезке $[a;b]$, обладающая тем свойством, что для всякой точки $x \in [a;b]$ существует предел $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$.

а) Покажите, что функция f может не быть непрерывной на $[a;b]$.

б) Покажите, что функция f непрерывна хотя бы в одной точке отрезка $[a;b]$.

в) Приведите пример, когда функция f, полученная такой конструкцией, непрерывна во всех иррациональных точках и разрывна во всех рациональных.

г) А может ли так быть, чтобы f, напротив, была непрерывна во всех рациональных точках и разрывна во всех иррациональных?