Анализ, листок 6 (осень 2006, 1 семестр)

p-адические числа и канторово множество

1. Покажите, что в кольце целых p-адических чисел $\mathbb{Z}_p$ имеет место «арифметика пределов»:

$$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n+\lim_{n\to\infty}b_n,\quad \lim_{n\to\infty}(a_nb_n)=\lim_{n\to\infty}a_n\lim_{n\to\infty}b_n.$$

2. Пусть $u\in\mathbb{Z}_p$ не делится на p. Покажите, что существует такое $v\in\mathbb{Z}_p$, что $uv=1$ (постарайтесь не пользоваться напрямую p-ичной записью).

3. Пусть $p>2$ и $u\in\mathbb{Z}_p$ не делится на p. Покажите, что u является в $\mathbb{Z}_p$ полным квадратом (т. е. существует $x\in\mathbb{Z}_p$, для которого $x^2=u$) тогда и только тогда, когда u сравнимо по модулю p с квадратом целого числа (т. е. существует $m\in\mathbb{N}$, для которого m^2-u делится на p).

4. Выясните, какие элементы в $\mathbb{Z}_2$ являются полными квадратами.

5. Рассмотрим $\mathbb{Z}_p$ и $\mathbb{R}$ как группы по сложению. Какие существуют гомоморфизмы из $\mathbb{Z}_p$ в $\mathbb{R}$, являющиеся непрерывными отображениями?

6. Какие существуют непрерывные гомоморфизмы из $\mathbb{Z}_p$, рассматриваемого как группа по сложению, в окружность (т. е. группу комплексных чисел, равных единице по модулю, с умножением в качестве операции)?

7. Пусть X — канторово множество.

а) Покажите, что X гомеоморфно $X\times X$.

б) Покажите, что X гомеоморфно произведению счетного числа пространств X.

8. Пусть X — линейно связное и компактное метрическое пространство. Покажите, что существует непрерывное и сюръективное отображение $f\colon[0;1]\to X$ («кривая Пеано»). (*эта задача некорректна — постройте контрпример. Верное утверждение получится, если вместо «линейно связного и компактного метрического пространства» написать «выпуклое компактное пддмножество в* $\mathbb{R}^n$*».*)

9. Существует ли непрерывная функция f на отрезке $[0;1]$, обладающая тем свойством, что для всякого $a\in[0;1]$ множество решений уравнения $f(x)=a$ имеет мощность континуум?

10. Докажите, что множество иррациональных чисел (с топологией, индуцированной с $\mathbb{R}$) гомеоморфно произведению счетного семейства счетных дискретных пространств.

11*. Докажите, что вполне несвязное и компактное метрическое пространство без изолированных точек гомеоморфно канторову множеству.