Анализ, листок 7 (осень 2006, 1 семестр)

Производная

1. Пусть $f\colon [a;b] \to \mathbb{R}^3$ — непрерывное отображение, дифференцируемое с ненулевой производной на $(a;b)$, причем $f(a) \neq f(b)$. Обязательно ли найдется точка $c \in [a;b]$, для которой касательная к кривой в точке $f(c)$ параллельна отрезку, соединяющему $f(a)$ и $f(b)$? (Иными словами: верна ли в $\mathbb{R}^3$ теорема о среднем?)

2. Функция $f\colon [a;b] \to \mathbb{R}$ называется *выпуклой*, если для любых $p, q \in [a;b]$ отрезок, соединяющий точки $(p, f(p))$ и $(q, f(q))$, лежит над графиком функции $y = f(x)$, и *вогнутой*, если этот отрезок лежит под графиком. Пусть f принадлежит классу C^2 на $[a;b]$ и $f''(x) \geqslant 0$ для всех $x \in (a;b)$; покажите, что f выпукла на $[a;b]$.

3. Пусть $x_1, \ldots, x_n$ — положительные числа.

а) Докажите, что $\frac{x_1+\ldots+x_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{x_1 \ldots x_n}$. (*Указание.* Проверьте, что $\ln$ — вогнутая функция.)

б) Докажите, что $\sqrt{\frac{x_1^2+\ldots+x_n^2}{n}} \geqslant \frac{x_1+\ldots+x_n}{n}$.

Напомним, что если $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ и $p \geqslant 1$, то $\|x\|_p = (|x_1|^p + \ldots + |x_n|^p)^{1/p}$.

4. Покажите, что если $x \in \mathbb{R}^n$ и $1 \leqslant p < q$, то $\|x\|_p \geqslant \|x\|_q$.

5. Пусть $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, $p > 1$ и $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Покажите, что $|x_1y_1 + \ldots + x_ny_n| \leqslant \|x\|_p\|y\|_q$. (*Указание.* Проверьте, что $t \mapsto t^p$ — выпуклая функция.)

6. Пусть $x, y \in \mathbb{R}^n$ и $p > 1$. Покажите, что $\|x+y\|_p \leqslant \|x_p\| + \|y\|_p$.

7. Пусть функция f непрерывна на $[a;b]$, дифференцируема на $(a;b)$ и существует предел $\lim_{x\to a+0} f'(x)$. Покажите, что в точке a у функции существует «правая производная» (предел $\lim_{h\to+0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$).

8. а) Функция f задана по правилу

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x > 0, \\ 0 & x \leqslant 0. \end{cases}$$

Докажите, что f бесконечно дифференцируема на всем $\mathbb{R}$.

б) Докажите, что на $\mathbb{R}$ существует возрастающая бесконечно дифференцируемая C^∞-функция f, тождественно равная нулю на $(-\infty; 0]$ и тождественно равная единице на $[1; +\infty)$.

9. Пусть f и g — функции класса C^{k+1} в окрестности нуля. Предположим, что для них имеют место асимптотики (при $x \to 0$)

$$f(x) = p(x) + o(x^k), \quad g(x) = q(x) + o(x^k),$$

где p и q — многочлены степени k без свободных членов. Покажите, что тогда для функции $y = f(g(x))$ имеет место асимптотика

$$f(g(x)) = r(x) + o(x^k),$$

где многочлен $r(x)$ получается из многочлена $p(q(x))$ отбрасыванием слагаемых степени $> k$.

10. Пусть $f(x) = \sin(x^{13} + x^{15})$. Найдите $f^{(43)}(0)$.

11. Найдите

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(\operatorname{sh} x) - \operatorname{sh}(\sin x)}{x^7}.$$

12. Найдите

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(\operatorname{tg} x) - \operatorname{tg}(\sin x)}{\arcsin(\operatorname{arctg} x) - \operatorname{arctg}(\arcsin x)}.$$