Анализ, листок 8 (осень 2006, 1 семестр)

Ряды и интегралы

Если $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ — две числовые последовательности, то пишут $a_n = O(b_n)$, если существует такое $C > 0$, что $|a_n| \leqslant C \cdot |b_n|$ для всех n (или, что равносильно, для всех достаточно больших n). Ряд $\sum a_n$ называется *рядом с положительными членами*, если все a_j — неотрицательные действительные числа.

1. Пусть $\sum a_n$ и $\sum b_n$ — ряды с положительными членами, причем $a_n = O(b_n)$. Покажите, что если $\sum b_n$ сходится, то и $\sum a_n$ сходится.

2. Пусть $\{a_n\}$ — монотонно убывающая последовательность положительных чисел. Покажите, что ряд $\sum a_n$ сходится тогда и только тогда, когда сходится ряд $\sum 2^n a_{2^n}$.

3. Пусть $f\colon [1;+\infty) \to (0;+\infty)$ — монотонно убывающая непрерывная функция. Покажите, что ряд $\sum_{n\in\mathbb{N}} f(n)$ сходится тогда и только тогда, когда существует предел $\lim_{M\to\infty} \int_1^M f(x)\,dx$.

4. Выясните, при каких $p, q \in \mathbb{R}$ сходится ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^p(\ln n)^q}$.

5. Покажите, что существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \left(\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} \right) - \ln n \right)$$

(этот предел называется *постоянной Эйлера*).

6. Пусть $\sum a_n$ — сходящийся ряд из действительных чисел.
 а) Обязательно ли сходится ряд $\sum a_n^2$?
 б) Обязательно ли сходится ряд $\sum a_n^3$?

7. Пусть X — топологическое пространство, $\{a_n\}$ — монотонно убывающая и стремящаяся к нулю последовательность действительных чисел, и пусть последовательность элементов $f_n \in C(X)$ обладает тем свойством, что $\|f_1 + \ldots + f_n\| \leqslant M$ для некоторой константы M, не зависящей от n. Покажите, что ряд $\sum a_n f_n$ равномерно сходится.

8. Пусть $\{a_n\}$ — последовательность действительных чисел. Покажите, что если ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n/n^s)$ сходится для некоторого $s = s_0 \in \mathbb{R}$, то он сходится равномерно по s на всяком отрезке, содержащемся в $(s_0;+\infty)$.

(Если вы знакомы с соответствующими определениями, сделайте эту же задачу для случая, когда s и a_n могут быть комплексными числами.)

9. Положим, при $s > 1$,

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \dots$$

(«дзета-функция Римана»).

а) Покажите, что

$$\zeta(s) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_1^s}} \cdots \frac{1}{1 - \frac{1}{p_n^s}},$$

где через p_n обозначено n-е простое число.

б) Найдите предел $\lim_{s\to 1+0}(s-1)\zeta(s)$.

в) Сходится ли ряд $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \dots$?

10. Найдите предел

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \right).$$

11. а) Вычислите индукцией по n интеграл $\int_0^{\pi/2} \sin^n x\, dx$ для всех $n \in \mathbb{N}$. (Для самопроверки: при нечетных n ответ — рациональное число, при четных — рациональное кратное числа π.)

б) Выведите из пункта (а) и неравенств между различными степенями синуса следующую формулу:

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2n)^2}{(1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1))^2 \cdot (2n+1)}.$$

12. Пусть $f\colon [a;b] \to \mathbb{C}$ — непрерывная функция. Покажите, что

$$\lim_{t\to+\infty} \int_a^b f(x)\sin(tx)\, dx = 0.$$