Анализ, листок 9 (осень 2006, 1 семестр)

Асимптотики; равномерная сходимость

Пусть f и g — две функции. Говорят, что $f \sim g$ при $x \to a$, если $\lim_{x\to a} f(x)/g(x) = 1$, и что $f \asymp g$, если $f = O(g)$ и $g = O(f)$. (Аналогичные обозначения применяются для последовательностей, для $x \to \infty$ и т. п.)

«Найдите асимптотику для f» означает «найти такую g, что $f \sim g$ (или хотя бы $f \asymp g$)». При этом подразумевается, что g должна быть «проще», чем g.

1. Найдите асимптотику с точностью до $\sim$: а) для $f(x) = 1 - \cos x$ при $x \to 0$;
б) для $f(x) = \sin(\pi/6^x) - 1/2$ при $x \to 1$.

2. Найдите асимптотику с точностью до $\sim$ функции $f(x) = \int_0^x \sqrt[3]{\sin t}\, dt$ при $x \to 0$.

Найдите асимптотику (желательно — с точностью до $\sim$) для таких последовательностей:

3. $a_n = (n+1)^\alpha - n^\alpha$ (при $\alpha > 0$).

4. $a_n = \sqrt[3]{n^5 - 3n + 2006}$.

5. a_n — n-й в порядке возрастания положительный корень уравнения $\operatorname{ctg} x = x$.

6. a_n — корень уравнения $x^7 + nx - 1 = 0$.

7. $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \sin a_n$.

8. $a_n = \int_0^1 (1-x^2)^n\, dx$.

Если уже доказано, что «простая» функция g является асимптотикой с точностью до $\sim$ для функции f, можно поискать «второй член асимптотического разложения» — асимптотику для $f - g$.

9. Найдите второй член асимптотического разложения для функций и последовательностей из следующих задач:
а) 1а; б) 2; в) 3; г) 5.

10. Обозначим через ℓ^1 множество последовательностей комплексных чисел $\alpha = \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, для которых ряд $\sum a_n$ абсолютно сходится. Положим $\|\alpha\| = \sum |a_n|$.

Покажите, что ℓ^1 — векторное пространство относительно почленного сложения и умножения на число и что оно является полным метрическим пространством относительно расстояния $\rho(\alpha,\beta)=\|\alpha-\beta\|$.

11. Обозначим через ℓ^2 множество последовательностей комплексных чисел $\alpha=\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, для которых ряд $\sum|a_n|^2$ сходится, и положим $\|\alpha\|=\sqrt{\sum|a_n|^2}$.

Покажите, что ℓ^2 — векторное пространство относительно почленного сложения и умножения на число и что оно является полным метрическим пространством относительно расстояния $\rho(\alpha,\beta)=\|\alpha-\beta\|$.

12. а) Покажите, что для всякого интервала $[a;b)\subset[0;1]$ и всякого положительного M множество

$$\left\{f\in C([0;1])\colon \exists x\in(a;b)\left|\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\right|\leqslant M\quad\text{для всех } y\in(a;b)\right\}$$

нигде не плотно в $C([0;1])$.

б) Покажите, что существуют функции, непрерывные на $[0;1]$, но не имеющие производной ни в одной точке этого отрезка.

13. Пусть $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — последовательность C^1-функций на интервале $[a;b]$ (это означает, что всякая функция f_n' продолжается на непрерывной функции на $[a;b]$). Предположим, что последовательности $\{f_n\}$ и $\{f_n'\}$ равномерно сходятся на $[a;b]$. Докажите, что если $\lim_{n\to\infty}f_n=f$, то $\lim_{n\to\infty}f_n'=f'$.

14. Обозначим через $C^1([a;b])$ векторное пространство C^1-функций на $[a;b]$ (см. определение в задаче 13). Для $f\in C^1([a;b])$ положим

$$\|f\|=\sup_{x\in[a;b]}|f(x)|+\sup_{x\in[a;b]}|f'(x)|$$

(под производной в концах подразумевается односторонняя производная). Покажите, что $C^1([a;b])$ — полное метрическое пространство относительно расстояния $\rho(f,g)=\|f-g\|$.

15. Докажите, что всякое замкнутое подмножество в $\mathbb{R}$ является множеством нулей какой-то бесконечно дифференцируемой функции. (*Указание.* Вспомните, как описываются открытые подмножества в $\mathbb{R}$.)