Контрольная работа по спецкурсу
“Векторные расслоения на комплексных проективных пространствах”

1. Рассмотрим следующие пучки на $\mathbb{P}^2$: $F_1 = \mathcal{O}_L$, $F_2 = \mathcal{J}_L$, $F_3 = \mathcal{O}_P$ и $F_4 = \mathcal{J}_P$, где $L \subset \mathbb{P}^2$ — прямая, а $P \subset \mathbb{P}^2$ — точка.
a) Вычислите $\mathcal{E}xt^p(F_i, F_j)$ для всех i, j и p.
b) Вычислите $\mathsf{Ext}^p(F_i, F_j)$ для всех i, j и p.
c) Вычислите $L_p f^* F_i$ для всех i и p, где $f : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^2$ — линейное отображение.

2. Пусть $V = H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(d))$, $d \geq 0$.
a) Докажите, что естественный гомоморфизм $V \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d)$ сюръективен;
b) Пусть F — его ядро; вычислите когомологии F.
c) Докажите, что F — локально свободен и найдите тип расщепления F.

3. Вычислите $\mathsf{Ext}^1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2), \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-2))$ и для каждого $\epsilon \in \mathsf{Ext}^1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2), \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-2))$ найдите тип расщепления расслоения E_ϵ из точной последовательности $0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-2) \to E_\epsilon \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2) \to 0$, соответствующей элементу ϵ.