ПРИМЕРЫ МНОГООБРАЗИЙ

Задача 1. В данных топологических пространствах введите структуру гладкого многообразия (порождающую данную топологию): а) множество прямых на плоскости, б) множество пар (ℓ, a), где ℓ — прямая на плоскости, проходящая через начало координат, и $a \in \ell$ — точка ($a = 0$ не исключается !); в) множество $G(4,2)$ плоскостей в $\mathbb{R}^4$, проходящих через начало координат; г) множество $G(n,k)$ подпространств размерности k в $\mathbb{R}^n$; д) множество левых смежных классов группы $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ невырожденных матриц по подгруппе верхнетреугольных матриц.

Задача 2. Введите структуру многообразия с краем в множестве неупорядоченных пар точек на окружности (точки могут совпадать).

Многообразие (обычное) называется *ориентируемым*, если у него имеется ориентированный атлас (но отношение эквивалентности — обычное, т.е. другие атласы могут быть и неориентированными).

Задача 3. Докажите, что а) лента Мебиуса неориентируема, б) $\mathbb{R}P^n$ неориентируемо при любом четном n, в) $G(5,2)$ ориентируемо.

Указание (к пункту 3а). Пусть U_1, U_2 — стандартный атлас на ленте Мебиуса, а $\{U_\alpha\}$ — какой-нибудь ориентированный атлас. Рассмотрите отображения перехода от карт U_α к картам U_1, U_2 — в каких точках они меняют ориентацию ?