ТЕХНИКА РАБОТЫ С МНОГООБРАЗИЯМИ

Задача 1. Докажите, что а) если многообразие связно, то оно линейно связно, б) если многообразие с краем связно, то его внутренность связна.

Задача 2. а) Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество, $\gamma : [0,1] \to U$ — гладкая несамопересекающаяся кривая, то для всякого t существует замкнутый шар Ω с центром в точке $\gamma(t)$ и такой, что $\gamma^{-1}(\Omega) \subset [0,1]$ — отрезок. б) Докажите, что если $U \subset \mathbb{R}^n$ — связное открытое множество, то две различные точки $a, b \in U$ всегда можно соединить гладкой несамопересекающейся кривой.

Задача 3. Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество, а $\gamma : [0,1] \to U$ — гладкая несамопересекающаяся кривая (т.е. гладкое отображение, для которого $\gamma'(t) \neq 0$ при всех t, и $\gamma(t) \neq \gamma(s)$ при $t \neq s$). Докажите, что существует $r > 0$ такое, что если для некоторой точки $x \in U$ имеем $\min_{t\in[0,1]} |\gamma(t) - x| < r$, то минимум достигается в единственной точке.

Указание. Без ограничения общности можно считать, что $|\gamma'(t)| = 1$ при всех t.

Задача 4. а) Пусть U, γ — как в задаче 3. Докажите, что в множестве U существует векторное поле X такое, что $X(\gamma(t))$ касается γ (при всех t), и $X \equiv 0$ вне некоторой окрестности V кривой γ, причем $\overline{V} \subset U$. б) Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ — связное открытое множество, и $a, b \in U$. Тогда существует открытое множество V, для которого $\overline{V} \subset U$, и диффеоморфизм $f : U \to U$, такой что $f(a) = b$, но $f(x) = x$ при $x \notin V$.

Задача 5. а) Пусть M — гладкое многообразие, $\gamma : [0,1] \to M$ — гладкая несамопересекающаяся кривая. Докажите, что для всякого t существует карта U, содержашая точку $\gamma(t)$ и такая, что $\gamma^{-1}(\overline{U}) \subset [0,1]$ — отрезок. б) Докажите, что существует связная карта U такая, что кривая γ лежит внутри нее.

Задача 6. Решите задачу 2 для гладких связных многообразий.

Задача 7. Пусть M — связное гладкое многообразие, и $a, b \in M$. Докажите, что существует диффеоморфизм $f : M \to M$, для которого $f(a) = b$.

Задача 8. а) Перечислите связные одномерные многообразия. б) Докажите, что одномерное многообразие не может быть гомеоморфно многообразию большей размерности.