ВЕКТОРНЫЕ ПОЛЯ

Задача 1. а) Докажите, что векторные поля (на $\mathbb{R}^2$) $e = x\frac{\partial}{\partial y}$, $f = y\frac{\partial}{\partial x}$ и $h = x\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial y}$ образуют алгебру Ли $\mathfrak{sl}_2$, то есть между ними выполнены соотношения $[h, e] = 2e$, $[h, f] = -2f$ и $[e, f] = h$. б) Вычислите потоки полей e, f и h и их коммутаторы.

Задача 2. а) Докажите, что соответствие $A \mapsto X_A$, где $A = (a_{ij})$ — матрица $n \times n$, а X_A — векторное поле на $\mathbb{R}^n$, равное $\sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i \frac{\partial}{\partial x_j}$, является изоморфизмом алгебр Ли. б) При $n = 3$ опишите потоки полей X_A, где A — кососимметрическая матрица (элемент подалгебры Ли $\mathfrak{so}_3 \subset \mathfrak{gl}_3$).

Задача 3. На двумерной сфере в дополнении к Гринвичскому меридиану введены координаты ψ и φ — широта и долгота. а) Докажите, что векторные поля $X = \cos\psi\frac{\partial}{\partial\psi}$ и $Y = \cos\psi\frac{\partial}{\partial\varphi}$ однозначно продолжаются на всю сферу. б) Запишите их в координатах x, y, определенных в северном полушарии (сфера реализована как множество $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$). в) Найдите их коммутатор. г) Вычислите их потоки и опишите коммутатор потоков.

Задача 4. а) Докажите, что группа $\mathrm{GL}(n)$ обратимых матриц $n \times n$ — открытое подмножество векторного пространства $\mathrm{Mat}(n)$ всех матриц. Следовательно, касательное пространство $T_A \mathrm{GL}(n)$ (при любом A) естественно отождествляется с $\mathrm{Mat}(n)$. б) Пусть векторное поле X_C на $\mathrm{GL}(n)$ определено равенством $X_C(A) = AC$, где $A \in \mathrm{GL}(n)$, а $C \in \mathrm{Mat}(n)$. Докажите, что соответствие $C \mapsto X_C$ является изоморфизмом алгебр Ли (где коммутатор в $\mathrm{Mat}(n)$ определен равенством $[C_1, C_2] = C_1C_2 - C_2C_1$).

Задача 5 (аналог задачи 4 для других матричных групп). а) Касательное пространство $T_E \mathrm{SO}(n)$ к группе ортогональных матриц $n \times n$ с определителем 1 в точке E (единичная матрица) естественно отождествляется (как ?) с множеством $\mathfrak{so}_n$ кососимметрических матриц. Обозначим $L_A : \mathrm{SO}(n) \to \mathrm{SO}(n)$ отображение, действующее по правилу $L_A(B) = AB$ $(A, B \in \mathrm{SO}(n))$. Для каждой матрицы $C \in \mathfrak{so}_n = T_E \mathrm{SO}(n)$ определим векторное поле X_C формулой $X_C(A) = L'_A(E)C$ $(\forall A \in \mathrm{SO}(n))$. Докажите, что $[X_{C_1}, X_{C_2}] = X_{[C_1,C_2]}$, где $[C_1, C_2] \stackrel{\mathrm{def}}{=} C_1C_2 - C_2C_1$. б) Сформулируйте и докажите аналогичное утверждение для группы $\mathrm{U}(n)$ унитарных матриц, в) для группы $\mathrm{SU}(n)$ унитарных матриц с определителем 1.