*ТЕОРЕМА ФРОБЕНИУСА

Трехмерная сфера $S^3 \subset \mathbb{R}^4 = \mathbb{C}^2$ задается как множество $\{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid |z|^2 + |w|^2 = 1\}$.

Задача 1. Докажите, что подпространство $\{(x, y) \in \mathbb{C} \mid \overline{z}x + x\overline{w}y = 0\}$ двумерно и лежит в $T_{(z,w)}S^3$.

Указание. Стандартное скалярное произведение в $\mathbb{R}^4 = \mathbb{C}^2$ задается формулой $\big((a, b), (c, d)\big) = \mathrm{Re}(\overline{a}c + \overline{b}d)$.

Задача 2. Найдите два линейно независимых (в каждой точке сферы) векторных поля, касающихся полученного распределения V.

Задача 3. а) Пусть $(z, w) \in S^3$. Докажите, что преобразование $R_{(z,w)}$, действующее по формуле $R_{(z,w)}(a, b) = (az - b\overline{w}, aw + b\overline{z})$, переводит S^3 в себя, причем $R_{(z,w)}(a, b)(1, 0) = (z, w)$. б) Используя результат пункта 3а, постройте на сфере S^3 атлас. в) Запишите поля из задачи 2 в этом атласе.

Задача 4. Найдите коммутатор полей из задачи 2. Является ли распределение V интегрируемым ?

Задача 5. Докажите, что многообразие TS^3 диффеоморфно $S^3 \times \mathbb{R}^3$.