ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ФОРМЫ

Контрольные вопросы. Пусть U, V — векторные пространства размерности m и n соответственно, $e_1, \dots, e_m$ и $f_1, \dots, f_n$ — базисы в них, $A : U \to V$ — линейный оператор, имеющий в этих базисах матрицу α_i^j.

1) Чему равна размерность векторных пространств $U \oplus V$, $U \otimes V$, $\mathrm{Hom}(U, V)$, $\mathrm{Symm}(U, k)$, $\Lambda^k U$?
2) Какие из перечисленных ниже векторных пространств изоморфны: $U \oplus U$, $U^* \oplus U^*$, $\mathrm{Hom}(U, V)$, $U \otimes V$, $U \otimes V^*$, $U^* \otimes V$, $U \oplus U^*$, $\mathrm{Hom}(U, V^*)$, билинейные формы на U, билинейные формы на U и V ?
3) Какие из изоморфизмов предыдущего пункта — канонические ?
4) Напишите (в базисе) элемент, соответствующий оператору A при каноническом изоморфизме $\mathrm{Hom}(U, V)$ с пространством $U \otimes V$, $U^* \otimes V$ или $U \otimes V^*$.
5) Напишите матричные элементы оператора $A \wedge A \wedge A$ в стандартном базисе пространств $\Lambda^3 U$ и $\Lambda^3 V$.

Вопросы в развитие лекции (см. лекции 6 и 7)

1) Пусть E_1 и E_2 — два расслоения с одной и той же базой. Придумайте определение расслоений $E_1 \oplus E_2$, $E_1 \otimes E_2$, $\mathrm{Hom}(E_1, E_2)$.
2) Пусть $f : M \to N$, а X — а) векторное поле, б) ковариантный k-тензор, в) контравариантный k-тензор на N. Можно ли определить тензор $f^* X$ на M ? А если X — соответствующий тензор на M, то можно ли определить тензор $f_* X$ на N ?

Задача 1. а) Напишите функции перехода касательного расслоения $T\mathbb{R}P^2$. б) Является ли внешний квадрат $\Lambda^2 T\mathbb{R}P^2$ тривиальным расслоением ?

Задача 2. а) Пусть в расслоении ранга 1 над окружностью функции перехода равны $A(t) = 1$ при $t \in (0, \pi)$, и $A(t) = \alpha(t)$ при $t \in (\pi, 2\pi)$ (подразумевается стандартный атлас из двух карт на окружности, см. лекцию 6). Докажите, что при $\alpha(t) > 0$ расслоение тривиально, а при $\alpha(t) < 0$ — изоморфно расслоению Мебиуса. б) Докажите, что всякое расслоение ранга 1 над окружностью либо тривиально, либо изоморфно расслоению Мебиуса.

Задача 3. Придумайте определение расслоения с базой $\mathbb{R}P^n$, слой которого над прямой $\ell \subset \mathbb{R}^{n+1}$ это а) сама прямая ℓ (такое расслоение называется тавтологическим, τ), б) гиперплоскость $\ell^\perp$ (это расслоение $\tau^\perp$). в) Докажите, что $\mathrm{Hom}(\tau, \tau^\perp) = T\mathbb{R}P^n$.

Задача 4. а) (повторение) Докажите, что дробно-линейные преобразования вида $z \mapsto (az + b)/(cz + d)$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $ad - bc = 1$, образуют группу и что эта группа действует на верхней полуплоскости $H = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}\, z > 0\}$. б) Докажите, что на H существует ровно одна, с точностью до константы, 2-форма ω, инвариантная относительно действия группы. в) Пусть $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$, и $f : D \to H$ действует по формуле $f(z) = i(1 - w)/(1 + w)$. Выпишите явно форму $f^*\omega$.

Задача 5. Функции $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ соответствует 3-форма $f(x)\, dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$. Векторному полю $\sum_{i=1}^3 a_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}$ на $\mathbb{R}^3$ соответствуют 1-форма $\sum_{i=1}^3 a_i(x) dx_i$ и 2-форма $\sum_{i=1}^3 (-1)^{i+1} a_i(x) dx_1 \wedge \widehat{dx_i} \wedge dx_3$. Во что переходит при этих соответствиях оператор внешнего дифференцирования ?

Задача 6. Пусть g — контравариантный симметрический 2-тензор на $\mathbb{R}^3$, равный $dx^2 + dy^2 + dz^2$ в стандартных координатах, а $\iota : S^2 \to \mathbb{R}^3$ — вложение в качестве единичной сферы с центром в нуле. Найдите тензор $\iota^* g$ в сферических координатах.

Пояснение. Если V — векторное пространство с базисом $e_1, \dots, e_n$, то базис в симметрическом квадрате V составляют тензоры $e_i \cdot e_j \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}(e_i \otimes e_j + e_j \otimes e_i)$, $1 \le i \le j \le n$. Имеется в виду, что dx, dy, dz — базис в $T_a \mathbb{R}^3$, а $dx^2 \stackrel{\text{def}}{=} dx \cdot dx$, и т.п.

Задача 7. Пусть M — произвольное многообразие, $\pi : T^*M \to M$ — стандартная проекция, а ν — 1-форма на T^*M, значение которой в точке $z = (x, \xi) \in T^*$ $(x = \pi(z).\xi \in T_x^* M)$ на векторе $v \in T_z T^* M$ равно $\langle \xi, \pi'(z) v \rangle$. а) Пусть $(q_1, \dots, q_n)$ — система координат на M, а $(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$ — соответствующая система координат на T^*M. Запишите в координатах p, q формы ν и $\omega \stackrel{\text{def}}{=} d\nu$. б) Пусть $f : M \to \mathbb{R}$ — гладкая функция, и $A_f : M \to T^*M$ задается формулой $A_f(x) = (x, df(x))$. Докажите, что $A_f^* \omega = 0$.

Задача 8. а) Группа SU(2) действует на $\mathbb{C}P^1 = \{[z_0 : z_1]\}$ проективными преобразованиями. Докажите, что существует ровно одна, с точностью до множителя, дифференциальная 2-форма ω на $\mathbb{C}P^1$, такая что $f^*\omega = \omega$ для всякого $f \in SU(2)$. б) Найдите явную формулу для ω в координатах w и $\overline{w}$, где $w = z_1/z_0$. в) Решите задачи 8а 8б для действия группы SU$(n+1)$ на $\mathbb{C}P^n$. г) Докажите, что $d\omega = 0$, где ω — форма, построенная в задаче 8в. д) Докажите, что $(2n)$-форма $\omega^{\wedge n}$ на $\mathbb{C}P^n$ нигде не обращается в нуль.