ИНТЕГРИРОВАНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ФОРМ

Задача 1 (форма площади). Пусть (ψ, φ) — географические координаты (широта, долгота) на $S^2 = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$, заданные в дополнении к полюсам $P_1 = (0, 0, 1)$ и $P_2 = (0, 0, -1)$. а) Докажите, что 1-форма $\nu = \cos^2 \psi \, d\varphi$ и 2-форма $\omega = \cos \psi \, d\psi \wedge d\varphi$ однозначно продолжаются на всю сферу, и ω не обращается в полюсах в нуль. б) Запишите формы ν и ω в окрестности каждого из полюсов в координатах x, y. в) Вычислите $\int_{S^2} \omega$. г) Вычислите $\int \nu$ по каждой параллели и каждому меридиану сферы.

Задача 2 (первые когомологии де Рама). а) Докажите, что 1-форма ν на S^1 точна тогда и только тогда, когда $\int_{S^1} \nu = 0$. б) Пусть ν — замкнутая 1-форма на $\mathbb{T}^2 = S^1 \times S^1$. Докажите, что интегралы $\varrho_1(\nu, a) = \int_{\{a\} \times S^1} \nu$ и $\varrho_2(\nu, a) = \int_{S^1 \times \{a\}} \nu$ не зависят от точки $a \in S^1$. в) Докажите, что замкнутая 1-форма ν на $\mathbb{T}^2$ точна тогда и только тогда, когда $\varrho_1(\nu) = \varrho_2(\nu) = 0$.

Задача 3 (старшие когомологии де Рама). Докажите, что 2-форма ω на а) $M = S^2$ б) $M = \mathbb{T}^2$ точна тогда и только тогда, когда $\int_M \omega = 0$. в) Докажите, что всякая 2-форма на $\mathbb{R}P^2$ точна.

Задача 4 (форма Эйлера). Пусть $M = STS^2$ — многообразие касательных векторов единичной длины к сфере S^2, $\pi : M \to S^2$ — проекция, X_1, X_2 — векторные поля единичной длины на S^2, определенные в дополнении к полюсам P_2 и P_1 соответственно. Пусть $v \in M$, $a \stackrel{\text{def}}{=} \pi(v) \neq P_2$. Обозначим $\theta_1(v)$ угол между v и $X_1(a)$; аналогично $\theta_2(v)$. а) Докажите, что $d\theta_1 - d\theta_2 = \pi^* \nu_0$, где ν_0 — некоторая 1-форма на $S^2 \setminus \{P_1, P_2\}$. б) Докажите, что на $S^2 \setminus \{P_2\}$ и $S^2 \setminus \{P_1\}$ имеются 1-формы ν_1, ν_2 такие, что $d\theta_1 - \pi^* \nu_1 = d\theta_2 - \pi^* \nu_2$. Тем самым определена 1-форма μ на M. в) Докажите, что $\int_{\pi^{-1}(a)} \mu = 2\pi$. г) На многообразии M действует группа $\mathrm{SO}(2)$ (поворотами векторов). Докажите, что если $A \in \mathrm{SO}(2)$, то $A^* \mu = \mu$. д) Запишите форму μ в координатах ψ, φ, θ, где ψ — широта, φ — долгота, θ — угол касательного вектора с меридианом. е) Докажите, что существует 2-форма ω на S^2 такая, что $d\mu = \pi^* \omega$. ж) Вычислите $\int_{S^2} \omega$. з) Пусть μ_1 — 1-форма на S^2, удовлетворяющая условиям пунктов 4в и 4г. Докажите утверждение пункта 4е для формы μ_1 и покажите, что ответ в пункте 4ж для всех форм μ_1 один и тот же.