ЛЕКЦИЯ 1

Краткое содержание. Гладкое многообразие, ориентированное многообразие.

n-мерныv атласом на множестве M называется совокупность подмножеств $U_\alpha \subset M$ (называемых *картами*), для каждого из которых зафиксировано открытое подмножество $V_\alpha \subset \mathbb{R}^n$ и взаимно однозначное отображение $x_\alpha : U_\alpha \to V_\alpha$ (называемое *системой координат*); при этом совокупность троек $(U_\alpha, V_\alpha, x_\alpha)$ обладает следующими свойствами:

1) Карты в совокупности покрывают все множество: $M = \bigcup_\alpha U_\alpha$.
2) Если карты U_α и U_β пересекаются, то множества $V_{\alpha\beta} = x_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \subset \mathbb{R}^n$ и $V_{\beta\alpha} = x_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \subset \mathbb{R}^n$ открыты, а отображение $\varphi_{\alpha\beta} = x_\beta^{-1} \circ x_\alpha : V_{\alpha\beta} \to V_{\beta\alpha}$ (называемое *отображением замены координат* или *отображением перехода*) является бесконечно гладким (это отображение $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, определенное на открытом подмножестве, поэтому его бесконечная гладкость означает просто наличие непрерывных частных производных произвольного порядка).

Два атласа $(U_\alpha, V_\alpha, x_\alpha)$ и $(P_\beta, Q_\beta, y_\beta)$ на одном и том же множестве M называются эквивалентными, если их объединение опять является атласом, т.е. если отображения перехода $y_\beta^{-1} \circ x_\alpha$ и $x_\alpha^{-1} \circ y_\beta$ являются бесконечно гладкими (в случае, когда карты U_α и P_β пересекаются). Нетрудно видеть, что это действительно отношение эквивалентности: композиция двух бесконечно гладких отображений $y_\beta^{-1} \circ x_\alpha$ и $z_\gamma^{-1} \circ y_\beta$ — бесконечно гладкое отображение $z_\gamma^{-1} \circ x_\alpha$.

Определение. Структурой гладкого n-мерного многообразия на множестве M называется класс эквивалентности атласов, если

I) В этом классе существует атлас, содержащий конечное или счетное число карт.
II) Если $a, b \in M$ — две различные точки, то в данном классе существует атлас, содержащий карты U_a и U_b такие, что $a \in V_a$, $b \in V_b$, и множества U_a и U_b не пересекаются.

Примеры многообразий:

Пример 1. Любое вложенное подмногообразие $M \subset \mathbb{R}^N$. Наличие атласа вытекает из самого определения вложенного подмногообразия, свойство II вытекает из хаусдорфовости $\mathbb{R}^N$ как топологического пространства (для любых двух точек $\mathbb{R}^N$ имеются непересекающиеся окрестности). Для доказательства I рассмотрим пересечение M_n многообразия M с шаром $\Omega_n \subset \mathbb{R}^N$ радиуса n с центром в начале координат. $M \subset \mathbb{R}^N$ замкнуто, поэтому M_n компактно и может быть покрыто конечным набором карт любого заданного атласа. Беря объединение по всем $n \in \mathbb{N}$, получим, что в каждом атласе имеется не более чем счетный набор карт, покрывающий $\bigcup_n M_n = M$.

Пример 2. Структура многообразия в $\mathbb{R}P^n$: имеется $n+1$ карт $U_0, \dots, U_n$; карта $U_k = \{[a_0 : \dots : a_n] \mid a_k \neq 0\}$. Множество $V_k = \mathbb{R}^n$ (при всех k); система координат $x_k : U_k \to V_k$ такая: $x_k([a_0 : \dots : a_n]) = (a_0/a_k, \dots, a_{k-1}/a_k, a_{k+1}/a_k, \dots, a_n/a_k)$. Множество $V_{kl} \subset V_k = \mathbb{R}^n$ состоит из точек $(y_1, \dots, y_n)$ таких, что $y_l \neq 0$. Отображение перехода $\varphi_{kl}(y_1, \dots, y_n) = (y_1/y_l, \dots, y_{l-1}/y_l, 1/y_l, y_{l+1}/y_l, \dots, y_n/y_l)$ — гладкое, поскольку знаменатель в нуль не обращается.

Пример 3. Условия I и II из определения многообразия страхуют от "диких" примеров. Вот пример атласа, не удовлетворяющего условию II. Рассмотрим множество ("вещественную прямую с раздвоенной точкой"), состоящее из всех чисел $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ и еще двух элементов, 0_+ и 0_-. Введем на нем карты $U_1 = \mathbb{R} \setminus \{0\} \cup \{0_1\}$ и $U_2 = \mathbb{R} \setminus \{0\} \cup \{0_2\}$. Положим $V_1 = V_2 = \mathbb{R}$, и возьмем в качестве систем координат очевидные "тождественные" отображения $U_i \to V_i$, $i = 1, 2$. Имеем $U_1 \cap U_2 = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, и отображение замены координат — тождественное. Пусть $0_+ \in U_+$, $0_- \in U_-$, где U_+, U_- — какие-то карты в каком-то атласе, эквивалентном данному. Поскольку отображение перехода от карты U_+ к карте U_1 — гладкое и, в частности, непрерывное, множество $V_{1+} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{x_1(x_+^{-1}(t)) \mid t \in U_+\} \subset \mathbb{R}$ открыто и содержит точку $0 = x_1(0_+)$ — следовательно, оно содержит некоторую окрестность этой точки. То же самое верно для множества $V_{2-} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{x_2(x_-^{-1}(t)) \mid t \in U_-\} \subset \mathbb{R}$. Но при $m \neq 0_+, 0_-$ имеет место равенство $x_1(m) = x_2(m)$, откуда вытекает, что множества V_{1+} и V_{2-} пересекаются — следовательно, пересекаются и карты U_+ и U_-.

Пример 4. Множество (фактор-группу) $\mathbb{T}^k = \mathbb{R}^k/\mathbb{Z}^k$ можно наделить структурой k-мерного многообразия. Пусть $V \subset \mathbb{R}^k$ — произвольное открытое подмножество такое, что если $u \in V$, $v \in \mathbb{Z}^k$ — вектор с целочисленными координатами, то $u+v \notin V$. Пусть $\pi : \mathbb{R}^k \to \mathbb{T}^k$ — естественная проекция; обозначим $U = \pi^{-1}(V)$. Тогда отображение $\pi^{-1} : U \to V$ — взаимно однозначное, и его можно принять за координатное.

Нетрудно видеть, что таким образом получается атлас на $\mathbb{T}^k$. Отображения замены координат являются параллельными переносами на векторы с целыми координатами и, следовательно, бесконечно гладки. Свойство II очевидно. Для проверки свойства I достаточно проверить, что $\mathbb{T}^k$ можно покрыть конечным количеством карт — докажите ! (достаточно $k+1$ карты).

Отображения перехода $\varphi_{\alpha\beta}$ произвольного атласа обладают следующими очевидными свойствами:

1) $\varphi_{\alpha\alpha} = \mathrm{Id}_{V_\alpha}$.
2) $\varphi_{\alpha\beta}^{-1} = \varphi_{\beta\alpha}$.
3) $\varphi_{\beta\gamma}\varphi_{\alpha\beta} = \varphi_{\alpha\gamma}$ в тех точках, где обе части этого равенства определены.

Обратно, пусть имеется набор открытых множеств $V_\alpha \subset \mathbb{R}^n$; для каждых α и β определено открытое подмножество (возможно, пустых) $V_{\alpha\beta} \subset V_\alpha$, и задан набор гладких отображений $\varphi_{\alpha\beta} : V_{\alpha\beta} \to V_{\beta\alpha}$, обладающих свойствами 1–3. Тогда отображения $\varphi_{\alpha\beta}$ являются отображениями перехода некоторого атласа на множестве M, которое "клеится" из дизъюнктного объединения $\bigsqcup_\alpha V_\alpha$ следующим образом. Назовем точку $x \in V_\alpha$ эквивалентной точке $y \in V_\beta$, если $y = \varphi_{\alpha\beta}(x)$; из свойств 1–3 вытекает, что это действительно отношение эквивалентности. Классы эквивалентности этого отношения и будут точками множества M; карты $U_\alpha = V_\alpha$, координатные отображения тождественные. Полученное множество M является многообразием, если выполнены свойства I (например, количество карт V_α не более чем счетно) и II.

Пример 5. Пусть $V_1 = V_2 = \mathbb{R}^2$, $V_{12} = V_{21} = \{(x,y) \mid x \neq 0\}$, а отображения φ_{12} и φ_{21} определяются формулами $\varphi_{12}(x,y) = \varphi_{21}(x,y) = (1/x, y)$, если $x > 0$, и $\varphi_{12}(x,y) = \varphi_{21}(x,y) = (1/x, -y)$, если $x < 0$. Свойства 1–3, очевидно, выполнены; соответствующее двумерное многообразие называется *лентой Мебиуса* (без края).

Отображение $f : M_1 \to M_2$ называется гладким, если координаты точки $f(x)$ в какой-нибудь (и, следовательно, в любой) карте гладко зависят от координат точки x — иными словами, если гладко отображение $y_\beta \circ f \circ x_\alpha^{-1}$, где $U_\alpha \subset M_1$ — карта, содержащая некоторую точку a, а $U_\beta \subset M_2$ — карта, содержащая точку $f(a)$. Если отображение гладко, взаимно однозначно, и обратное к нему гладко, то оно называется диффеоморфизмом; диффеоморфные многообразия с точки зрения теории многообразий неотличимы.

На гладком многообразии естественным образом возникает структура топологического пространства: множество $W \subset M$ открыто, если для любой карты U_α множество $x_\alpha(U_\alpha \cap W) \subset \mathbb{R}^n$ открыто. (В частности, сами $U_\alpha = x_\alpha^{-1}(V_\alpha)$ открыты.) Аксиомы топологического пространства проверяются без труда. Введенная топология зависит только от структуры многообразия на M, а не от конкретного атласа, поскольку отображения перехода $\varphi_{\alpha\beta}$ гладкие и, следовательно, непрерывные. Из свойства I многообразий вытекает, что полученное топологическое пространство удовлетворяет аксиоме счетности (имеет счетную базу), а из свойства II вытекает, что пространство хаусдорфово — любые две его точки имеют непересекающиеся окрестности. В частности, топологическое пространство примера 3 вообще нельзя породить структурой гладкого многообразия.

Имеют место следующие утверждения о топологии многообразий:

Утверждение. *1) Если два многообразия гомеоморфны, то они имеют одну и ту же размерность (т.е. одна и та же топология не может порождаться двумя структурами многообразия разных размерностей).*

2) Если два многообразия размерности $n \leq 3$ гомеоморфны, то они диффеоморфны (т.е. если топология порождена структурой многообразия размерности $n \leq 3$, то такая структура единственна).

3) Предыдущее утверждение неверно в размерностях $n \geq 4$ (там существуют гомеоморфные, но не диффеоморфные многообразия).

Доказательства всех этих утверждений весьма непросты; мы их не приводим.

Понятие многообразия имеет варианты; например — ориентированное многообразие. Говорят, что гладкое отображение $f : A \to \mathbb{R}^n$, где $A \subset \mathbb{R}^n$ открыто, *сохраняет ориентацию*, если $\det f'(x) > 0$ при всех $x \in A$. Ориентированный атлас это атлас, в котором все отображения замены координат сохраняют ориентацию. Два ориентированных атласа эквивалентны, если их объединение — ориентированный атлас, т.е. если отображения замены координат от карт одного атласа к картам другого сохраняют ориентацию. *Ориентированное многообразие* это класс эквивалентности ориентированных атласов, удовлетворяющий свойствам I и II (счетная база и отделимость) из определения многообразия.

Пример 6. Атлас на торе $\mathbb{T}^k$, описанный в примере 4, ориентированный, т.к. параллельные переносы сохраняют ориентацию. Определитель отображения перехода из примера 2 равен $-1/y_l^{n+1}$, то есть атлас неориентированный. При нечетном n существует ориентированный атлас, эквивалентный данному: для этого нужно взять те же карты U_k, $k = 0, 1, \dots, n$, а в качестве координатного отображения взять $x_k([a_0 : \dots : a_n]) = (-a_0/a_k, \dots, -a_{k-1}/a_k, a_{k+1}/a_k, \dots, a_n/a_k)$. В этом случае определитель отображения перехода сменит знак и будет равен $1/y_l^{n+1} > 0$, т.к. n нечетно. При четном n не существует ориентированного атласа, эквивалентного данному (такое многообразие называется неориентируемым) — докажите !