ЛЕКЦИЯ 10

Краткое содержание. Теорема Фробениуса. Расслоение струй.

Пусть на многообразии M размерности n задано k-мерное распределение V (то есть k-мерное подпространство $V(a) \subset T_aM$ для каждого a, гладко зависящее от a). Обозначим $\mathrm{Vect}^{\perp}(M,V)$ множество дифференциальных l-форм ω (для всех l) таких, что $\omega(X_1,\dots,X_l)=0$, если векторные поля $X_1,\dots,X_l$ касаются распределения V (т.е. принадлежат модулю $\mathrm{Vect}(M,V)$, см. лекцию 5). Очевидно, $\mathrm{Vect}^{\perp}(M,V)$ является $C^\infty(M)$-модулем и, более того, идеалом в алгебре всех дифференциальных форм: если $\omega \in \mathrm{Vect}^{\perp}(M,V)$, то $\nu\wedge\omega \in \mathrm{Vect}^{\perp}(M,V)$ для всех форм ν.

Теорема 1 (теорема Фробениуса об интегрируемости, вторая форма). *Следующие утверждения эквивалентны:*

1) *Идеал $\mathrm{Vect}^{\perp}(M,V)$ замкнут относительно взятия внешнего дифференциала: если $\omega\in\mathrm{Vect}^{\perp}(M,V)$, то $d\omega\in\mathrm{Vect}^{\perp}(M,V)$*
2) *Для каждой точки $a\in M$ найдется семейство замкнутых 1-форм $\nu_1,\dots,\nu_{n-k}$ и окрестность $U\ni a$ такие, что при всех $b\in U$ линейные функционалы векторы $\nu_1(b),\dots,\nu_{n-k}(b)$ составляют базис в аннуляторе $V^{\perp}(b)\subset T_b^*M$ пространства $V(b)\subset T_bM$.*
3) *Распределение V вполне интегрируемо.*

Доказательство. $1\Longrightarrow 3$: пусть $X_1,X_2\in\mathrm{Vect}(M,V)$, а $\nu\in\mathrm{Vect}^{\perp}(M,V)$ — 1-форма. Тогда $\nu([X_1,X_2]) = \mathcal{L}_{X_1}(\nu(X_2)) - \mathcal{L}_{X_2}(\nu(X_1)) - d\nu(X_1,X_2) = 0$. Поскольку форма ν произвольна, отсюда вытекает, что модуль $\mathrm{Vect}(M,V)$ замкнут относительно коммутирования векторных полей. Из теоремы Фробениуса в первой форме (для полей) вытекает, что V вполне интегрируемо.

$3\Longrightarrow 1$: пусть V вполне интегрируемо, $X_1,\dots,X_{l+1}\in\mathrm{Vect}(M,V)$ и $\omega\in\mathrm{Vect}^{\perp}(M,V)$ — l-форма. Тогда из теоремы 1 лекции 9 вытекает, что $d\omega(X_1,\dots,X_{l+1})=0$.

$3\Longrightarrow 2$: пусть V вполне интегрируемо, и $f: N\to M$ — интеграл V, то есть гладкое отображение, для которого $f'(x)T_xN\subset V(f(x))$ и $\mathrm{rk}\, f'(x)=k$ для всех x. Утверждение носит локальный характер, так что можно без ограничения общности считать, что $N\subset\mathbb{R}^k\subset\mathbb{R}^n$ и $M\subset\mathbb{R}^n$ открыты. Пусть $a\in N$. Обозначим $w_i=f'(e_i)$, $i=1,\dots,k$, где $e_1,\dots,e_n$ — стандартный базис в $\mathbb{R}^n$ ($\mathbb{R}^k$ порождено $e_1,\dots,e_k$). Выберем в $\mathbb{R}^n$ векторы $w_{k+1},\dots,w_n$ такие, чтобы $w_1,\dots,w_n$ составляли в $\mathbb{R}^n$ базис. Продолжим f до отображения $N\times\mathbb{R}^{n-k}\to\mathbb{R}^n$ по формуле $f(a,\sum_{i=k+1}^n\varepsilon_ie_i)\stackrel{\text{def}}{=}f(a)+\sum_{i=k+1}^n\varepsilon_iw_i$. Это диффеоморфизм достаточно малой окрестности $V\subset N\times\mathbb{R}^{n-k}\subset\mathbb{R}^n$ точки $a\in N$ на ее образ $U\stackrel{\text{def}}{=}f(V)$ (почему ?). Следовательно, отображение $f^{-1}:U\to V\subset\mathbb{R}^n$ — координаты в окрестности U. В этих координатах образ интеграла $f:V\to\mathbb{R}^n$ задается уравнениями $x_{k+1}=\dots=x_n=0$, где $x_1,\dots,x_n$ — координаты на $\mathbb{R}^n\supset\mathbb{R}^k$ относительно базиса $e_1,\dots,e_n$. 1-формы $dx_{k+1},\dots,dx_n$ замкнуты и их значения в каждой точке $b\in U$ порождают аннулятор пространства $V(b)$.

$2\Longrightarrow 3$: опять-таки, в силу локальности утверждения можно считать, что $M\subset\mathbb{R}^n$ открыто. Тогда 1-формы $\nu_1,\dots,\nu_{n-k}$ точны по лемме Пуанкаре: $\nu_i=dg_i$, $g_i\in C^\infty(M)$. По теореме о неявной функции для каждой точки $a\in M$ существует такое гладкое отображение $f:\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}^n$, определенное в некоторой окрестности U начала координат, что $f(0)=a$ и $g_i(f(x))=g_i(a)$ для всех $i=1,\dots,n-k$ и всех $x\in U$. Очевидно, f — интеграл распределения V. □

Пусть $k\in\mathbb{N}$, $f,g\in C^\infty(M)$ и $a\in M$. Обозначим $f\sim_{a,k} g$, если $|f(b)-g(b)| = o(|x(b)-x(a)|^k)$ при $b\to a$, где x — произвольная система координат в окрестности $a\in M$. Ясно, что $\sim_{a,k}$ — отношение эквивалентности и от выбора координат не зависит. Множество классов эквивалентности гладких функций при фиксированном k и всевозможных a называется пространством k-струй гладких функций на M и обозначается $J_k(M)$.

Пусть (U_i,V_i,x_i) — атлас на M. Для k-струи произвольной функции $f\in C^\infty(M)$ в точке $a\in U_\alpha$ обозначим $\tilde{x}_\alpha(f)\in V_\alpha\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^{(n+1)n/2}\times\dots\times\mathbb{R}^{C^k_{n+k-1}}$ совокупность, в которой первая компонента — вектор $x_\alpha(a)\in V_\alpha$, вторая есть $f(a)\in\mathbb{R}$, а последующие — наборы частных производных функции $f\circ x_\alpha^{-1}:V_\alpha\to\mathbb{R}$ в точке $x_\alpha(a)$ до k-го порядка включительно. Из формулы Тейлора следует, что набор отображений $\tilde{x}_\alpha$ является в $J_k(M)$ системой координат. Из формулы дифференцирования сложной функции вытекает, что таким образом в $J_k(M)$ введена структура векторного расслоения ранга $1+\sum_{s=1}^kC^s_{n+s-1}=C^k_{n+k}$ с базой M.

Пример 1. Пусть $k=0$. Поскольку координата $f(a)\in\mathbb{R}$ от выбора x_α не зависит, многообразие $J_0(M)$ — тривиальное расслоение ранга 1 над M. Пространство его гладких сечений есть $C^\infty(M)$. Для произвольного k аналогичное рассуждение показывает, что $J_k(M)$ является прямой суммой тривиального одномерного расслоения (соответствующего координате $f(a)$) и векторного расслоения ранга $\sum_{s=1}^k C_{n+s-1}^s = C_{n+k}^k - 1$. Отсюда вытекает, что на каждом слое $J_k(M)_a$ расслоения $J_k(M)$ существует канонический линейный функционал $\Phi_a : J_k(M)_a \to \mathbb{R}$ (k-струе функции сопоставляется значение функции в той же точке).

Пример 2. Пусть $k=1$. Очевидно, $f\sim_{a,1} g$, если $f(a)=g(a)$ и $df(a)=dg(a)$. Отсюда вытекает, что $J_1(M)=\mathbb{R}\oplus T^*M$.

Замечание. Многообразие $J_k(M)$ является расслоением над $J_{k-1}(M)$: отображение расслоения состоит в забывании последних C_{n+k-1}^k координат. Это отображение корректно определено, поскольку в формуле для замены координат в s-ой производной участвуют только производные порядка s и ниже. В случае $k=1$ это расслоение — векторное, сумма T^*M и тривиального одномерного расслоения над $\mathbb{R}$. Однако уже при $k=2$ это расслоение векторным не является, поскольку $\frac{\partial^2(f\circ x_\beta^{-1})}{\partial z_i \partial z_j} = \sum_{s,t} \frac{\partial^2(f\circ x_\alpha^{-1})}{\partial w_s \partial w_t} \frac{\partial(\varphi_{\alpha\beta})_i}{\partial z_s} \frac{\partial(\varphi_{\alpha\beta})_j}{\partial z_t} + \sum_s \frac{\partial(f\circ x_\beta^{-1})}{\partial z_s} \frac{\partial^2(\varphi_{\alpha\beta})_s}{\partial z_i \partial z_j}$ — второе слагаемое не является линейным по второй производной (на самом деле это расслоение — аффинное, т.к. отображения перехода имеют вид $y=Ax+b$, для некоторой матрицы A и вектора b). Это явление известно как "неинвариантность формы высших дифференциалов относительно замены координат".