ЛЕКЦИЯ 11

Краткое содержание. Теорема Тома о трансверсальности.

Пусть E — векторное расслоение с базой M.

Предложение 1. *Существует гладкая функция $Q : E \to \mathbb{R}$ такая, что ограничение ее на каждый слой — положительно определенная квадратичная форма.*

Доказательство. Пусть $\{(U_i, V_i, x_i)\}$ — атлас на M, а $\{\varrho_i\}$ — соответствующее разбиение единицы. Обозначим $p : E \to M$ отображение расслоения, и пусть $(x_i, v_i) : p^{-1}(U_i) \to V_i \times \mathbb{R}^k$ — система координат на E. Зададим $q_i : p^{-1}(U_i) \to \mathbb{R}$ формулой $q_i(z) = |v_i(z)|^2$ и положим $Q = \sum_i \varrho_i q_i$. □

Следствие. *Векторные расслоения E и E^* изоморфны.*

Пусть $a \in M$ и $k \in \mathbb{N}$. Два гладких сечения $f, g \in \Gamma(E, M)$ назовем k-эквивалентными в точке a (обозначение $f \sim_{a,k} g$), если $Q(f(x) - g(x)) = o(|x-a|^k)$, где расстояние $|x-a|$ между двумя точками базы M вычисляется по отношению к некоторой системе координат — ясно, что понятие k-эквивалентности от выбора этих координат не зависит. Множество классов k-эквивалентности (для всех $a \in M$) обозначается $J_k(E)$ и называется пространством k-струй сечений расслоения E. Аналогично случаю тривиального одномерного E (см. лекцию 10) доказывается, что $J_k(E)$ — векторное расслоение с базой M. Его ранг равен $nd(m,k)$, где $n = \operatorname{Rk} E$, $m = \dim M$, и $d(m,k)$ — размерность пространства многочленов степени k от m переменных.

Если M компактно, то на множестве $C^0(E, M)$ непрерывных сечений расслоения E можно ввести структуру метрического пространства: $d(f,g) = \max_{a \in M} Q(f(a) - g(a))^{1/2}$. Аналогично теореме 1 лекции 9 семестра 1 доказывается, что это пространство полно; задаваемая метрикой топология от выбора Q не зависит (проверьте !). Обозначим теперь $C^k(E)$ множество сечений E обладающих частными производными до k-го порядка включительно, и введем на этом пространстве метрику $d(f,g) = \max_{a \in M} Q(J_k(f)(a) - J_k(g)(a))^{1/2}$, где Q — послойная положительно определенная квадратичная форма на $J_k(E)$, а $J_k(f) \in C^0(J_k(E))$ — сечение расслоения $J_k(E)$, определенное сечением $f \in C^k(E)$. Очевидно, $C^k(E)$ — полное метрическое пространство.

Предложение 2 (теорема Бэра). *Пусть P — полное метрическое пространство, а $A_1, A_2, \dots \subset P$ — открытые всюду плотные множества. Тогда пересечение $\bigcap_{n=1}^\infty A_n$ всюду плотно.*

Доказательство. Пусть $U \subset P$ открыто. Тогда $A_1 \cap U$ открыто и, следовательно, содержит открытый шар $B_{r_1}(a_1)$. Множество A_2 всюду плотно, поэтому $A_2 \cap B_{r_1}(a_1) \neq \varnothing$; следовательно, существует шар $B_{r_2}(a_2) \subset A_2 \cap B_{r_1}(a_1) \subset A_1 \cap A_2 \cap U$; без ограничения общности $r_2 < r_1/2$. Продолжая этот процесс, построим последовательность шаров $B_{r_1}(a_1) \supset B_{r_2}(a_2) \supset \dots$, причем $r_k < r_1/2^k$. Следовательно, $r_k \to 0$, а из полноты P вытекает, что существует $a \in \bigcap_{n=1}^\infty B_{r_n}(a_n)$. Очевидно, $a \in \bigcap_{n=1}^\infty A_n \cap U$, откуда вытекает, что $\bigcap_{n=1}^\infty A_n$ всюду плотно. □

Пусть $f_1 : M_1 \to N$ и $f_2 : M_2 \to N$ — гладкие отображения. Они называются трансверсальными, если для любых $a_1 \in M_1$, $a_2 \in M_2$ либо $f_1(a) \neq f_2(a_2)$, либо $f_1(a_1) = f_2(a_2) \stackrel{\text{def}}{=} b \in N$ и $T_b N = f_1'(a_1) T_{a_1} M_1 + f_2'(a_2) T_{a_2} M_2$ (сумма не обязательно прямая !).

Пример 1. Две кривые на плоскости ($M_1 = M_2 = \mathbb{R}$, $N = \mathbb{R}^2$, f_1, f_2 — погружения) трансверсальны, если они не касаются друг друга. То же самое верно для двух поверхностей в $\mathbb{R}^3$ ($N = \mathbb{R}^3$, M_1 и M_2 двумерны). Трансверсальность двух поверхностей в $\mathbb{R}^4$ — более сильное условие, чем отсутствие касаний (возможна еще ситуация, когда $\dim(f'(a) T_a M_1 + g'(a) T_a M_2) = 3$, когда поверхности не касаются, но имеют общую касательную прямую и поэтому не трансверсальны). Две кривые в $\mathbb{R}^3$ трансверсальны, если не пересекаются.

Пример 2. Пусть $f_1 : M_1 \to \mathbb{R}$ — гладкая функция, а $a \in \mathbb{R}$ — точка (т.е. M_2 — точка, а $f_2(M_2) = \{a\}$). Тогда f_1 и f_2 трансверсальны, если a — регулярное (некритическое) значение f_1.

Теорема 1 (Р. Том). *Пусть $F : N \to J_k(M)$ — вложение (т.е. $\operatorname{Rk} f'(a) = \dim N$ при всех $a \in N$, и $f(a) \neq f(b)$ при $a \neq b$). Тогда множество $A_F \stackrel{def}{=} \{f \in C^{k+1}(M) \mid J_k(f)$ и F трансверсальны$\}$ является пересечением счетного числа всюду плотных открытых множеств.*

Следствие. *Множество A_F всюду плотно.*

Жаргон: вместо того, чтобы сказать, что множество объектов, обладающих каким-то свойством A, содержит пересечение счетного числа открытых всюду плотных множеств, говорят, что свойство A выполнено для объекта *общего положения*.

Лемма 1. *Пусть $d \in \mathbb{N}$ и $F : N \to M \times \mathbb{R}^d$ — вложение. Тогда для точки $z \in \mathbb{R}^d$ общего положения F трансверсально к отображению $f_z : M \to M \times \mathbb{R}^d$, задаваемому формулой $f_z(a) = (a, z)$.*

Доказательство. Если f_z трансверсально к ограничению F на некоторую окрестность любой точки $a \in N$, то оно трансверсально и к F. Поскольку N можно покрыть не более чем счетным числом координатных окрестностей, диффеоморфных шару и имеющих компактное замыкание, достаточно доказать теорему в случае, когда N — такая окрестность.

Пусть $p : M \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ — проекция на второй сомножитель. Отображение F трансверсально к f_z тогда и только тогда, когда композиция $p \circ F : N \to \mathbb{R}^d$ трансверсальна к точке z (в смысле примера 2). Очевидно, множество таких z открыто.

Для доказательство всюду плотности применим индукцию по d и $s = \dim N$. При $d = 1$ из леммы Сарда и примера 2 следует, что множество $z \in \mathbb{R}$, к которым трансверсальна функция $p \circ F : N \to \mathbb{R}$, имеет полную меру. Поскольку оно открыто, оно всюду плотно.

При произвольном d из леммы Сарда следует, что для $x \in \mathbb{R}^1$ общего положение отображение F трансверсально к отображению $g_x : M \times \mathbb{R}^{d-1} \to M \times \mathbb{R}^d$, заданному формулой $g_x(v) = (v, x)$. Из теоремы о неявной функции следует, что $F(N) \cap M \times \mathbb{R}^{d-1} \times \{x\}$ для таких x — подмногообразие (образ вложения) размерности $s - 1$. По предположению индукции это подмногообразие трансверсально вложению $h_y : M \to M \times \mathbb{R}^{d-1}$, заданному равенством $h_y(v) = (v, y)$, для $y \in \mathbb{R}^{d-1}$ общего положения. Но тогда $f_{(y,x)}$ трансверсально к F. Отсюда вытекает, что множество z таких, что f_z трансверсально к F, всюду плотно. □

Доказательство теоремы 1. Как и в лемме 1, достаточно доказать теорему для случая, когда $N \subset \mathbb{R}^s$ — открытый шар. В этом случае множество A_F, очевидно, открыто, и надо доказать всюду плотность.

Пусть $p : J_k(M) \to M$ — отображение расслоения. Без ограничения общности можно считать, что $F(N)$ мало, так что ограничение расслоения $J_k(M)$ на $U \overset{\text{def}}{=} p(F(N))$ тривиально — представляет собой прямое произведение $U \times \mathbb{R}^d$, где $d = \operatorname{Rk} J_k(M) = 1 + \sum_{s=1}^{k} C_{n+s-1}^{s}$. Пространство $\mathbb{R}^d$ можно отождествить с множеством многочленов от n переменных степени не выше k.

Без ограничения общности можно считать, что $J_k(f) = 0$. Согласно лемме 1, найдется сколь угодно малый многочлен R такой, что F трансверсально к R. Сечение R, определенное над $U \subset M$, можно продолжить на все M так, чтобы вне некоторой окрестности $V \supset U$ оно совпадало с $J_k(f) = 0$. Полученное сечение можно сделать сколь угодно близким к нулевому, если выбрать R малым, а V — близким к U. □

Пример 3. Пусть $F : M \times \mathbb{R} \to J_1(M) = \mathbb{R} \oplus T^*M$ — отображение вида $F(a, t) = (t, a, 0)$ (здесь $0 \in T_a^*M$). Согласно теореме Тома для функций $f : M \to \mathbb{R}$ общего положения $J_1(f)$ трансверсальна к F.

Если $J_1(f)(a) = F(b)$, то $df(a) = 0$, т.е. a — критическая точка f. Если $J_1(f)$ трансверсальна к F, то по теореме о неявной функции множество критических точек $a \in M$ является подмногообразием коразмерности, равной коразмерности $F(M) \subset J_1(M)$, т.е. $n = \dim M$. Следовательно, множество критических точек функции общего положения — нульмерное многообразие, то есть эти точки все изолированы.

Пусть теперь $x : U \to V \subset \mathbb{R}^n$ — система координат на M в окрестности критической точки a, причем $x(a) = 0$. Соответствующие координаты на $\mathbb{R} \oplus T^*M$ обозначим $(r, \tilde{x}) = (r, x, p)$ (r соответствует первому слагаемому, x — тот же, что на M, а $p_i(v)$ это i-ая компонента ковектора $v \in T_a^*M$ в базисе $dx_1(a), \dots, dx_n(a) \in T_a^*M$). Пространство $F'(t, a)T_{(t,a)}\mathbb{R} \times M \subset \mathbb{R} \times T_{(t,a)}T^*M = \mathbb{R} \times T_aM \times T_a^*M$ порождено векторами $\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}$. Имеем: $J_1(f)'(\frac{\partial}{\partial x_i}) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)\frac{\partial}{\partial p_j}$. Тем самым $J_1(f)$ трансверсальна к F в точке a, если матрица $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)$ обратима. Тем самым у функции общего положения все ее критические точки невырождены.

Пример 4. Пусть $f = (f_1, \dots, f_m) : S^1 \to \mathbb{R}^m$ — гладкое отображение, т.е. гладкое сечение тривиального m-мерного расслоения над S^1; обозначим это расслоение E_m. Имеем (аналогично случаю одномерного расслоения) $J_1(E_m) = \mathbb{R}^m \oplus (T^*M)^m$; $J_1(f)(t) = (t, df_1(t), \dots, df_m(t))$.

Рассмотрим отображение $F : S^1 \to J_1(E_m)$, действующее по правилу $F(t) = (t, 0, \dots, 0)$. Поскольку $\dim F'(t)T_tS^1 = 1$, а $\dim J_1(S^1, \mathbb{R}^m) = m + 1$, отображения $J_1(f)$ и F при $m \geq 2$ трансверсальны, если $J_1(f)(S^1) \cap F(S^1) = \varnothing$, т.е. $f'(t) \neq 0$ для всех t — кривая гладкая.

Нетрудно видеть, что теорема Тома верна и для сечений произвольных расслоений (почему ?). Тем самым доказано, что кривая общего положения на произвольном многообразии размерности $n > 1$ гладкая.

Существует “мультилокальный” аналог теоремы Тома:

Теорема 2. *Пусть $r \in \mathbb{N}$ и $p : J_k(M)^r \to M^r$ — r-ая декартова степень отображения расслоения $J_k(M) \to M$. Пусть $F : N \to J_k(M)^r$ — гладкое отображение, такое что $p(F(a)) \notin \Delta$ при всех $a \in N$, где Δ — “большая диагональ”: $\Delta = \{(a_1, \dots, a_r) \in M^r \mid \exists i \neq j, a_i = a_j\}$. Тогда для функции $f \in C^\infty(M)$*

общего положения ее r-кратная k-струя $J_{k,r}(f)(a_1,\ldots,a_r) \overset{def}{=} (J_k(f)(a_1),\ldots,J_k(f)(a_r))$ — *отображение, трансверсальное к* F.

Доказательство. Такое же, как у теоремы Тома. Единственное отличие — в конструкции "шевеления" f_z. Здесь требуется для *набора* точек $a_1,\ldots,a_r$ построить функцию, которая в окрестностях этих точек имела бы заданные k-струи, а вне некоторых чуть больших окрестностей тех же точек не отличалась от f. Это, очевидно, возможно, если среди точек a_i нет одинаковых — поэтому и нужно выбрасывать диагональ. □

Пример 5. Пусть $r=2$, M произвольно, а вложение $F:\mathbb{R}\times(M^2\setminus\Delta)\to J_1(M)^2=\mathbb{R}^2\times(T^*M)^2$ задано формулой $F(t,a,b)=(t,t,a,0,b,0)$, здесь $0\in T_a^*M$ и $0\in T_b^*M$. Имеем $\dim F(\mathbb{R}\times M^2)=\dim\mathbb{R}\times M^2=2n+1$, $\dim J_1(M)^2=4n+2$, так что коразмерность равна $2n+1$. Размерность $J_{1,2}(f)(M)$ равна $2n<2n+1$. Поэтому отображения $J_{1,2}(f)$ и F трансверсальны только если их образы не пересекаются. Это означает, что значения функции f в различных критических точках различны (все критические значения простые). Согласно теореме 2, это верно для функции общего положения.

Пример 6. Как и в случае примера 4, можно определить мультиструи $J_{k,r}(E_m)$, и для них верен аналог теоремы 2. Пусть $k=0$, $r=2$, $M=S^1$, а $F:(S^1)^2\times\mathbb{R}^m\to J_{0,2}(S^1,\mathbb{R}^m)=((S^1)^2\setminus\Delta)\times(\mathbb{R}^m)^2$ определяется формулой $F(a,b,t)=(a,b,t,t)$. Условие $J_{0,2}(f)(a,b)=F(c,d,t)$ означает, что $a=c$, $b=d$ и $f(a)=f(b)=t$. Коразмерность $F((S^1)^2\times\mathbb{R}^m)$ в $J_{0,2}(S^1,\mathbb{R}^m)$ равна m, а $\dim J_{0,2}(f)(S^1)=2$. Поэтому если $J_{0,2}(f)$ и F трансверсальны и $m>2$, то их образы не пересекаются, и кривая f не имеет точек самопересечения — согласно теореме 2 такова кривая общего положения.