ЛЕКЦИЯ 2

Краткое содержание. Многообразия с краем. Векторные расслоения. Касательное расслоение.

Говорят, что на множестве M задан *n-мерный атлас с краем*, если имеется набор троек $(U_\alpha, V_\alpha, x_\alpha)$, где $U_\alpha \subset M$, $V_\alpha \subset \mathbb{R}^n$ — либо открытое множество, либо открытое подмножество в полупространстве $\mathbb{R}^n_+ = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_n \geq 0\}$, а $x_\alpha : U_\alpha \to V_\alpha$ — взаимно однозначное отображение, причем $\bigcup_\alpha U_\alpha = M$, множества $W_{\alpha\beta} = x_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \subset V_\alpha$ открыты (в $\mathbb{R}^n$ или в $\mathbb{R}^n_+$), и отображение замены координат $x_\alpha \circ x_\beta^{-1} : W_{\beta\alpha} \to W_{\alpha\beta}$ бесконечно гладкие. Под бесконечно гладким отображением в случае, когда $W_{\beta\alpha}$ и $W_{\alpha\beta}$ — открытые подмножества в $\mathbb{R}^n_+$, понимается отображение, имеющее непрерывные частные производные всех порядков, причем в точках границы (где $x_n = 0$) под производной $\frac{\partial}{\partial x_n}$ имеется в виду односторонний предел $\lim_{x_n \to +0}$.

Класс эквивалентности n-мерных атласов с краем, удовлетворяющий условиям I и II из определения многообразия, называется n-мерным многообразием с краем. Точка $a \in M$ называется точкой края, если имеется карта $U_\alpha \ni a$ такая, что V_α — открытое подмножество в $\mathbb{R}^n_+$, и $x_\alpha(a)$ лежит на границе $\mathbb{R}^n_+$. Край (совокупность всех точек края) обозначается ∂M. Точка $a \in M$ называется внутренней, если либо имеется карта $U_\alpha \ni a$ такая, что V_α — открытое множество в $\mathbb{R}^n$, либо V_α — открытое подмножество в $\mathbb{R}^n_+$, и $x_\alpha(a)$ лежит во внутренней части $\mathbb{R}^n_+$. Совокупность всех внутренних точек M обозначается $\operatorname{int} M$.

Предложение 1. *1)* $M = \operatorname{int}(M) \sqcup \partial M$.

2) Множество $\operatorname{int}(M)$ *имеет естественную структуру n-мерного многообразия (без края !).*

3) Множество ∂M имеет естественную структуру многообразия размерности $n-1$, также без края.

Доказательство. Очевидно, $M = \operatorname{int}(M) \cup \partial M$. Пусть $a \in \operatorname{int}(M) \cap \partial M$; тогда без ограничения общности имеются карты U_α и U_β такие, что $V_\alpha \subset \mathbb{R}^n$ открыто, $V_\beta \subset \mathbb{R}^n_+$ открыто, и $x_\beta(a) = p = (p_1, \dots, p_{n-1}, 0)$. Отображение замены координат $\varphi_{\alpha\beta} = x_\beta \circ x_\alpha^{-1}$ — гладкое, и обратное к нему также гладкое, поэтому если $q = x_\alpha(a)$, то $\varphi'_{\alpha\beta}(q)$ — невырожденный линейный оператор $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. По теореме о неявной функции отображение $\varphi_{\alpha\beta}$ переводит любую достаточно малую окрестность W точки q в открытое множество $Z \subset \mathbb{R}^n \supset \mathbb{R}^n_+$. Поскольку $V_\alpha \subset \mathbb{R}^n$ открыто, можно считать, что $W \subset V_\alpha$, откуда $Z \subset V_\beta \subset \mathbb{R}^n_+$. Но всякая окрестность точки $p = (p_1, \dots, p_{n-1}, 0)$ содержит точки, не лежащие в $\mathbb{R}^n_+$ — противоречие. Следовательно, $\operatorname{int}(M) \cap \partial M = \varnothing$.

В качестве карт на $\operatorname{int}(M)$ можно взять все карты U_α, для которых $V_\alpha \subset \mathbb{R}^n$ открыто, а также все множества вида $\widetilde{U_\beta} = x_\beta^{-1}(\{(p_1, \dots, p_n) \in V_\beta \mid p_n > 0\})$, где $V_\beta \subset \mathbb{R}^n_+$ открыто. Условия из определения многообразия тривиальным образом выполнены.

В качестве карт на ∂M можно взять все множества вида $Q_\beta = x_\beta^{-1}(\{\{(p_1, \dots, p_{n-1}, 0) \in V_\beta\})$, где $V_\beta \subset \mathbb{R}^n_+$ открыто. Согласно пункту 1, $Q_\beta \subset \partial M$; условия из определения многообразия легко проверяются. □

Примеры многообразий с краем многочисленны: скажем, полусфера (край — сфера на единицу меньшей размерности), или полноторие в $\mathbb{R}^3$ (край — двумерный тор).

Еще одним вариантом понятия многообразия является *гладкое векторное расслоение. Гладкое векторное расслоение ранга k с n-мерной базой* это многообразие E с атласом, в котором всякая карта имеет вид $(U_\alpha, V_\alpha \times \mathbb{R}^k, x_\alpha)$, где $V_\alpha \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество, $x_\alpha : U_\alpha \to V_\alpha \times \mathbb{R}^k$ — координатное отображение, а отображение замены координат $\varphi_{\alpha\beta} = x_\beta \circ x_\alpha^{-1} : V_{\alpha\beta} \times \mathbb{R}^k \to V_{\beta\alpha} \times \mathbb{R}^k$ имеет вид $\varphi_{\alpha\beta}(x, v) = (\psi_{\alpha\beta}(x), A_{\alpha\beta}(x)v)$, где $\psi_{\alpha\beta} : V_{\alpha\beta} \to V_{\beta\alpha}$ — гладкое отображение, $A_{\alpha\beta}(x) : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ — линейный оператор, гладко зависящий от точки $x \in V_{\alpha\beta}$.

Как многообразие, E имеет размерность $n + k$.

Пример 1 (очевидный). Тривиальное векторное расслоение ранга k: пусть B — многообразие, $\{(\tilde{U}_\alpha, V_\alpha, y_\alpha)\}$ — какой нибудь атлас в нем. Возьмем $E = B \times \mathbb{R}^k$, $U_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{U}_\alpha \times \mathbb{R}^k$, $x_\alpha(a, v) \stackrel{\text{def}}{=} (y_\alpha(a), v)$. Тогда в E получается структура гладкого векторного расслоения, в котором отображения $\psi_{\alpha\beta}$ — отображения замены координат в многообразии B, а $A_{\alpha\beta}(x)$ — всегда единичный оператор.

Пример 2. Лента Мебиуса: пусть имеются две карты $U_1 = \mathbb{R}^2$ и $U_1 = \mathbb{R}^2$, пересекающиеся по множеству $U_1 \cap U_2 = (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}$. Координатные отображения тождественные; отображения перехода $\varphi_{12}(x, v) = (1/x, v)$, если $x > 0$, и $\varphi_{12}(x, v) = (1/x, -v)$, если $x < 0$.

С гладким векторным расслоением ранга k и размерности $n + k$ естественным образом связаны n-мерное многообразие B (*база расслоения*), гладкое отображение отображение $p : E \to B$ (*отображение расслоения*) и структура k-мерного векторного пространства на каждом множестве $p^{-1}(b) \subset E$, $b \in B$ (множество называется слоем расслоения над точкой b базы). По определению многообразие B склеивается из множеств V_α с помощью отображений перехода $\psi_{\alpha\beta} : V_{\alpha\beta} \to V_{\beta\alpha}$ — легко видеть, что условия на отображения перехода (см. лекцию 1) здесь выполнены (поскольку они выполнены для отображений перехода $\varphi_{\alpha\beta}$ многообразия E). Отображение p определяется равенством $p(a) = \pi(x_\alpha(a))$, где $a \in U_\alpha \subset E$, а $\pi : V_\alpha \times \mathbb{R}^k \to V_\alpha$ — естественная проекция. Нетрудно видеть, что определение отображения p корректно: если $a \in U_\alpha \cap U_\beta$, то $\pi(x_\beta(a)) = \varphi_{\alpha\beta}(\pi(x_\alpha(a))))$, то есть точки $\pi(x_\beta(a)) \in V_\alpha$ и $\pi(x_\alpha(a))) \in V_\beta$ представляют одну и ту же точку многообразия B. Все множество $p^{-1}(b)$ лежит в некоторой карте U_α; имеем $x_\alpha(p^{-1}(b)) = \{(q, v) \mid v \in \mathbb{R}^k\}$, где $q \in V_\alpha$ — координаты точки b (в системе координат, получающейся из x_α). Тем самым получилось отождествление $p^{-1}(b)$ и $\mathbb{R}^k$, откуда в $p^{-1}(b)$ возникает структура k-мерного векторного пространства. Эта структура определена корректно, т.е. не зависит от выбора карты U_α: действительно, если $a \in U_\alpha \cap U_\beta$, $p(a) = b$ и $x_\alpha(a) = (q, v)$, то $x_\beta(a) = (\varphi_{\alpha\beta}(q), A_{\alpha\beta}(q)v)$ — структура векторного пространства (сложение и умножение векторов на число) получается та же самая, поскольку оператор $A_{\alpha\beta}(q)$ линеен.

Замечание (о терминологии). Если E рассматривается просто как многообразие (т.е. его отображения перехода рассматриваются просто как гладкие отображения $V_{\alpha\beta} \times \mathbb{R}^k \to V_{\beta\alpha} \times \mathbb{R}^k$, а линейность по второй координате игнорируется), то E называют *тотальным пространством* расслоения. Часто векторным расслоением называют тройку (E, B, p), где E — тотальное пространство; впрочем, если на E задана структура векторного расслоения в описанном выше смысле, то все элементы тройки (E как многообразие, B и p) этой структурой однозначно определяются, так что это одно и то же определение.

Пример 3. В примере 1 базой расслоения является многообразие B, а $p : E = B \times \mathbb{R}^k \to B$ — естественная проекция. В примере 2 база расслоения $B = S^1$ (определенная стандартным атласом из двух карт $V_1 = V_2 = \mathbb{R}$, при этом $V_{12} = V_{21} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, и отображение перехода $\varphi(x) = 1/x$). Лента Мебиуса не является тривиальным расслоением ранга 1 над S^1; более того, она не диффеоморфна (т.е. не эквивалентна как многообразие, а не только как расслоение) тотальному пространству $S^1 \times \mathbb{R}$ такого расслоения — докажите !

С каждым гладким n-мерным многообразием M связано векторное расслоение ранга n с базой, называемое касательным и обозначаемое TM. Определение TM для подмногообразий $\mathbb{R}^N$ существенно использует вложение $M \hookrightarrow \mathbb{R}^N$ (TM само является подмногообразием в $\mathbb{R}^{2N}$); для “абстрактных” многообразий M нужно другое определение.

Кривой на многообразии M называется гладкое отображение $\gamma : \mathbb{R} \to M$. Две кривых γ_1 и γ_2 назовем эквивалентными, если $x(\gamma_1(t)) - x(\gamma_2(t)) = o(t)$ при $t \to 0$; здесь $x : U \to \mathbb{R}^n$ — какая-нибудь система координат в окрестности U точки $a \stackrel{\text{def}}{=} \gamma_1(0) = \gamma_2(0)$. Очевидно, это отношение не зависит от системы координат и действительно является отношением эквивалентности. Множество классов эквивалентности обозначается TM — в этом множестве мы и введем структуру векторного расслоения.

Пусть (U, V, x) — система координат на многообразии M. Определим карту $\tilde{U} \subset TM$ как множество всех классов эквивалентности кривых $\gamma : \mathbb{R} \to M$, для которых $\gamma(0) \in U$. Положим также $\tilde{V} = V \times \mathbb{R}^n$ и зададим отображение $\tilde{x} : \tilde{U} \to \tilde{V}$ равенством $\tilde{x}(\gamma) = (x(\gamma(0)), \frac{d}{dt} x(\gamma(t))|_{t=0})$.

Предложение 2. *Набор всевозможных $(\tilde{U}, \tilde{V}, \tilde{x})$, где (U, V, x) — карты на M, определяет в TM структуру векторного расслоения ранга n с базой M.*

Доказательство. Прежде всего заметим, что определение $\tilde{x}$ корректно: если кривые γ_1 и γ_2 эквивалентны (т.е. касаются в нуле), то из формулы Тейлора следует, что $\tilde{x}(\gamma_1) = \tilde{x}(\gamma_2)$. Пусть $U_1 \cap U_2 \neq \varnothing$, и $\varphi : W_{12} \to W_{21}$ — отображение перехода (для многообразия M). Тогда из формулы дифференцирования сложной функции вытекает, что если $\tilde{x}_1(\gamma) = (y, v)$, то $\tilde{x}_2(\gamma) = (\varphi(y), \varphi'(y)v)$, откуда вытекает, что TM — векторное расслоение. Условия I и II для TM вытекают из соответствующих условий для M. Очевидно, что базой расслоения является многообразие M; отображение расслоения $p : TM \to M$ сопоставляет кривой γ точку $\gamma(0) \in M$. $\square$

Касательным пространством к M в точке a называется множество $T_a M \stackrel{\text{def}}{=} p^{-1}(a)$.

Если $f : M \to N$ — гладкое отображение многообразий, то можно определить его производную $f' : TM \to TN$ равенством $f'([\gamma]) = [f \circ \gamma]$ (здесь $[\sigma]$ — класс эквивалентности, содержащий кривую σ). В силу гладкости отображения f производная определена корректно: если $[\gamma_1] = [\gamma_2]$, то $[f \circ \gamma_1] = [f \circ \gamma_2]$.