ЛЕКЦИЯ 3

Краткое содержание. Производная. Теорема о разбиении единицы. Максимальные идеалы в алгебре гладких функций.

Как и в случае вложенного подмногообразия, для каждой системы координат (U,V,x), где $a \in U$, в T_aM возникает базис $\frac{\partial}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}(a)$, составленный из (классов эквивалентности) кривых $\gamma_i(t) \stackrel{\text{def}}{=} x^{-1}(x_1(a), \dots, x_i(a)+t, \dots, x_n(a))$.

Предложение 1. *Производная гладкого отображения $f : M \to N$ это морфизм векторных расслоений, т.е. гладкое отображение $f' : TM \to TN$, переводящее слой T_aM в слой $T_{f(a)}N$, причем ограничение $f'(a) : T_aM \to T_{f(a)}N$ — линейный оператор. Если (U,V,x) и (P,Q,y) — системы координат на M и N в окрестностях точек a и $f(a)$ соответственно, то матрица оператора $f'(a)$ в базисах $\frac{\partial}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}(a)$ и $\frac{\partial}{\partial y_1}(f(a)), \dots, \frac{\partial}{\partial y_n}(f(a))$ равна $\frac{\partial (f_{xy})_i}{\partial b_j}(x(a))$, где $f_{xy}(b_1, \dots, b_n) \stackrel{def}{=} y(f(x^{-1}(b_1, \dots, b_n)))$.*

Доказательство такое же, как в случае подмногообразий в $\mathbb{R}^N$.

Заметим еще, что атлас $(\tilde U, \tilde V, \tilde x)$ на многообразии TM всегда ориентированный: действительно, если $\tilde\varphi$ — отображение перехода этого атласа ($\tilde\varphi(y,v) = (\varphi(y), \varphi'(y)v)$), то $\tilde\varphi'(y,v) = \begin{pmatrix} \varphi'(y) & 0 \\ \varphi''(y)v & \varphi'(y) \end{pmatrix}$, откуда $\det \tilde\varphi'(y,v) = \det \varphi'(y)^2 > 0$.

Следующее свойство многообразий называется *паракомпактностью*:

Предложение 2. *Пусть M — гладкое многообразие, а $\{P_\alpha\}$ — его покрытие открытыми множествами: $M = \bigcup_\alpha P_\alpha$. Тогда существуют такие открытые множества $Q_{\alpha\beta}$ (где β пробегает некоторое заранее не известное множество индексов), что $Q_{\alpha\beta} \subset P_\alpha$ при всех α и β, имеет место равенство $M = \bigcup_{\alpha,\beta} Q_{\alpha,\beta}$, и каждая точка $x \in M$ принадлежит только конечному набору множеств $Q_{\alpha,\beta}$.*

Коротко: для каждого открытого покрытия многообразия существует его локально конечное открытое измельчение.

Лемма 1. *Для всякого многообразия имеется конечный или счетный атлас $(U_\alpha, V_\alpha . x_\alpha)$, такой что замыкания $\overline{U_\alpha} \subset M$ и $\overline{V_\alpha} \subset \mathbb{R}^n$ компактны при всех α.*

Доказательство. Пусть $\{(U_\alpha, V_\alpha, x_\alpha)\}$ — какой-нибудь конечный или счетный атлас. Поскольку $\mathbb{R}^n$ диффеоморфно открытому шару, можно без ограничения общности считать, что все $\overline{V_\alpha}$ компактны. Тогда для каждой точки $q \in V_\alpha$ величина $d(x, \partial V_\alpha) = \sup_{r \in \partial V_\alpha} |q - r|$ положительна, поскольку ∂V_α — компакт. Рассматривая в каждой точке $q \in V_\alpha$ шар $B(x, d(x, \partial V_\alpha/2)$, получим представление $V_\alpha = \bigcup_i V_{\alpha i}$ в виде объединения счетного количества открытых подмножеств таких, что $\overline{V_{\alpha i}} \subset V_\alpha$, и $\overline{V_{\alpha i}}$ компактно.

Возьмем теперь в качестве карт $U_{\alpha i} \stackrel{\text{def}}{=} x_\alpha^{-1}(V_{\alpha i})$. Поскольку $\overline{V_{\alpha i}} \subset V_\alpha$, отображение x_α^{-1} определено в точках $\overline{V_{\alpha i}}$, откуда вытекает, что $\overline{U_{\alpha i}} = x_\alpha^{-1}(\overline{V_{\alpha i}})$ — компакт (непрерывный образ компакта). □

Следствие 1. *Для всякого многообразия M существует такая последовательность открытых множеств $M_1 \subset M_2 \subset \dots \subset M$, что $\bigcup_n M_n = M$ и $\overline{M_n} \subset M_{n+1}$ компактно.*

Доказательство. Возьмем атлас $U_1, U_2, \dots$ из леммы и положим $M_1 = U_1$. Далее по индукции: пусть M_n уже определена, тогда возьмем наименьшее k такое, что $U_1, \dots, U_k$ покрывают компакт $\overline{M_n}$, и положим $M_{n+1} \stackrel{\text{def}}{=} U_1 \cup \dots \cup U_k$. □

Доказательство предложения 2. Рассмотрим последовательность $M_1 \subset M_2 \subset \dots \subset M$ из следствия 1. Для всякого k множество $\overline{M_k} \setminus M_{k-1}$ компактно и, следовательно, может быть покрыто конечным набором множеств $P_{\alpha_1^{(k)}}, \dots, P_{\alpha_{r_k}^{(k)}}$. Положим $Q_{\alpha_i^{(k)},k} \stackrel{\text{def}}{=} (P_{\alpha_i^{(k)}} \setminus \overline{M_{k-2}}) \cap M_{k+1}$. Тогда все множества $Q_{\alpha,k}$ открыты, имеет место включение $Q_{\alpha,k} \subset P_\alpha$, множества $Q_{\alpha_1^{(k)},k}, \dots, Q_{\alpha_{r_k}^{(k)},k}$ покрывают $\overline{M_k} \setminus M_{k-1}$ и целиком содержатся в $M_{k+1} \setminus \overline{M_{k-1}}$. Нетрудно видеть, что $\{Q_{\alpha,k}\}$ — искомое локально конечное покрытие. □

Функцией на многообразии называется его отображение в $\mathbb{R}$; гладкой функцией — гладкое отображение в $\mathbb{R}$. Носителем функции $f : M \to \mathbb{R}$ называется множество $\mathrm{supp}(f) \stackrel{\text{def}}{=} \overline{\{x \in M \mid f(x) \neq 0\}}$.

Теорема 1 (о разбиении единицы). *Пусть $\{P_\alpha\}$ — открытое покрытие многообразия M. Тогда существует такое семейство гладких функций $\varrho_\alpha : M \to \mathbb{R}$, что $\varrho_\alpha(x) \ge 0$ для всех $x \in M$, $\operatorname{supp}(\varrho_\alpha) \subset U_\alpha$ и $\sum_\alpha \varrho_\alpha(a) \equiv 1$.*

Доказательство. Прежде всего заметим, что достаточно найти функции, удовлетворяющие более слабому условию $\sum_\alpha \varrho_\alpha(a) > 0$ при всех $a \in M$: если такие функции найдены, то функции $\widetilde{\varrho}_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \varrho_\alpha / \sum_\beta \varrho_\beta$ удовлетворяют условию теоремы.

Пусть $\{Q_\alpha\}$ — измельчение покрытия $\{P_\alpha\}$: $Q_\alpha \subset P_\alpha$. Если для $\{Q_\alpha\}$ теорема доказана, то она верна и для $\{P_\alpha\}$: можно взять те же самые функции ϱ_α. Тем самым согласно предложению 2, можно без ограничения общности считать, что покрытие $\{P_\alpha\}$ локально конечно.

Пусть $\{U_\beta\}$ — атлас в M; без ограничения общности можно считать и его локально конечным. Рассмотрим открытое покрытие $P_{\alpha\beta} \stackrel{\text{def}}{=} P_\alpha \cap U_\beta$. Если для $\{P_{\alpha\beta}\}$ теорема доказана, то она верна и для $\{P_\alpha\}$: достаточно взять $\varrho_\alpha = \sum_\beta \varrho_{\alpha\beta}$; сумма конечна в силу локальной конечности атласа. Тем самым можно без ограничения общности считать, что каждое множество P_α содержится в какой-нибудь карте — что эквивалентно тому, что P_α само является картой.

Итого, достаточно доказать теорему для локально конечного атласа $(P_\alpha, Q_\alpha, x_\alpha)$. Применяя конструкцию леммы 1, можно также добиться, чтобы замыкания $\overline{P_\alpha} \subset M$ и $\overline{Q_\alpha} \subset \mathbb{R}^n$ были компактны.

Перенумеруем карты и докажем, что множество $R_1 \stackrel{\text{def}}{=} x_1(P_1 \setminus \bigcup_{\beta\ne 1} P_\beta)$ компактно. Пусть это не так, и $A \subset R_1$ — бесконечное подмножество, не имеющее в R_1 предельных точек. Поскольку $x_1^{-1}(A) \subset \overline{P_1}$, а $\overline{P_1}$ — компакт, у множества $x_1^{-1}(A)$ имеется предельная точка $b \in M$. Имеем $b \in P_i$ для некоторого i. Если $i = 1$ (и других i не существует), то точка $x_1(b) \in R_1$ будет предельной для множества A, вопреки его выбору. Тем самым $i > 1$. Но тогда пересечение $P_i \cap x_1^{-1}(A)$ непусто (даже бесконечно) — следовательно, непусто и множество $A \cap x_1(P_i \cap P_1)$, вопреки предположению, что $A \subset R_1$.

В силу компактности R_1 имеем (аналогично лемме 1) $\varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} d(R_1, \partial Q_1) > 0$. Множество $\widetilde{R_1} = \bigcup_{x\in R_1} B(x, \varepsilon/2) \subset Q_1$ и имеет положительную меру (здесь $B(x, r)$ — замкнутый шар радиуса r с центром в точке x). В то же время $B(x, \varepsilon/2) \subset Q_1$ при всяком $x \in \widetilde{R_1}$. Как известно (см. лекцию 10 семестра 1) существует функция $f_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ такая, что $f(0) = 1$, $f(x) = 0$ при $|x| \ge \varepsilon/2$, и $0 < f(x) < 1$ при прочих x. Обозначим $\chi_{\widetilde{R_1}}$ характеристическую функцию множества $\widetilde{R_1}$ ($\chi_{\widetilde{R_1}}(x) = 1$ при $x \in R_1$, и $\chi_{\widetilde{R_1}}(x) = 0$ при прочих x) и положим $\varphi_1 = \chi_{\widetilde{R_1}} * f_\varepsilon$. Согласно правилу дифференцирования свертки, функция φ_1 гладкая; более того, функция $\varrho_1 : M \to \mathbb{R}$, определенная равенством $\varrho_1(a) = \varphi_1(x_1(a))$ при $a \in P_1$ и $\varrho_1(a) = 0$ при $a \ne P_1$, также гладкая (докажите !).

Обозначим теперь $W_1 = \{a \in M \mid \varrho_1(a) > 0\}$. Согласно построению, если $\varphi_1(q) = 0$, то $q \in x_1(P_1 \cap P_i)$ для некоторого $i > 1$. Следовательно, множества $W_1, P_2, P_3, \dots$ составляют покрытие M.

Остальные функции ϱ_n, $n > 1$, определяем точно таким же образом по индукции, только в качестве R_n берем множество $x_n(P_n \setminus \bigcup_{i>n} P_\beta \setminus \bigcup_{j<n} W_j)$ (это не влияет на дальнейшие рассуждения, поскольку множества $W_1, \dots, W_{n-1}, P_n, P_{n+1}$ при всяком n составляют покрытие M). Нетрудно видеть, что это гарантирует неравенство $\sum_\alpha \varrho_\alpha > 0$. □

С каждым многообразием M можно связать ассоциативную коммутативную алгебру с единицей $C^\infty(M)$, элементы которой — гладкие функции $f : M \to \mathbb{R}$. На алгебре $C^\infty(M)$ можно ввести топологию: для каждого компакта K, целиком лежащего в некоторой карте U_α, и всякого набора индексов $i_1, \dots, i_s$ определим функцию $p_{K;i_1,\dots,i_s} : C^\infty(M) \to \mathbb{R}_{\ge 0}$ равенством $p_{K;i_1,\dots,i_s}(f) = \max_{a\in x_\alpha(K)} \left|\frac{\partial^s f(x_\alpha^{-1}(a))}{\partial a_{i_1} \dots \partial a_{i_s}}\right|$; здесь $x_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}^n$ — координатное отображение. Зафиксируем функцию $f_0 \in C^\infty(M)$, и для каждого компакта K и всякого набора индексов $i_1, \dots, i_s$ выберем число $\varepsilon_{K;i_1,\dots,i_s}$; тогда базу топологии в $C^\infty(M)$ составляют все множества $\{f \in C^\infty(M) \mid p_{K;i_1,\dots,i_s}(f - f_0) < \varepsilon_{K;i_1,\dots,i_s}\}$. Нетрудно проверить, что это действительно база некоторой топологии, причем эта топология (называемая компактно-открытой C^∞-топологией) не зависит от выбора атласа в многообразии M. Сходимость в компактно-открытой C^∞-топологии означает равномерную на каждом компакте сходимость вместе со всеми частными производными (любого порядка, в любых координатах).

Теорема 2. *Пусть M — гладкое многообразие и $a \in M$. Множество $\mathfrak{I}_a \stackrel{\text{def}}{=} \{f \in C^\infty(M) \mid f(a) = 0\}$ является замкнутым максимальным идеалом в алгебре $C^\infty(M)$. Всякий замкнутый максимальный идеал в $C^\infty(M)$ имеет вид $\mathfrak{I}_a$ для некоторого $a \in M$.*

Для доказательства нам потребуется

Лемма 2. *Пусть $\mathfrak{I} \subset C^\infty(M)$ — замкнутый идеал, элементы которого не имеют общих нулей: $\forall a \in M \exists f \in \mathfrak{I} f(a) \ne 0$. Тогда $\mathfrak{I} = C^\infty(M)$.*

Доказательство. Рассмотрим множества $\Omega_f = \{b \in M \mid f(b) \ne 0\}$ для всех $f \in \mathfrak{I}$. Поскольку общего нуля нет, множества Ω_f образуют открытое покрытие многообразия M. Рассмотрим разбиение единицы ϱ_f, подчиненное $\{\Omega_f\}$ — оно существует по теореме 1. Функция $R = \sum_{f\in\mathfrak{I}} \varrho_f f^2$ конечна (поскольку $\sum_{f\in\mathfrak{I}} \varrho_f = 1$, в каждой точке a имеется только конечное количество f таких, что $\varrho_f(a) \neq 0$), принадлежит $\mathfrak{I}$ (поскольку это идеал и замкнутое множество), и нигде не обращается в нуль (поскольку $\{\Omega_f\}$ — покрытие). Следовательно, $1 = R/R \in \mathfrak{I}$, то есть $\mathfrak{I}$ — тривиальный идеал, $\square$

Доказательство теоремы 2. Очевидно, $\mathfrak{I}_a$ — идеал; по лемме 2 он максимален. Если $f \notin \mathfrak{I}_a$, то $p_{K;\varnothing}(f) > |f(a)|/2$ для всякого компакта K, содержащего точку a, откуда следует, что если $p_{K;\varnothing}(g-f) < |f(a)|/2$, то $g \notin \mathfrak{I}_a$. Следовательно, дополнение к множеству $\mathfrak{I}_a$ открыто (в компактно-открытой C^∞-топологии), а сам идеал $\mathfrak{I}_a$ замкнут.

Обратно, пусть $\mathfrak{I} \subset C^\infty(M)$ — максимальный идеал и замкнутое множество. По лемме 2 все функции $f \in \mathfrak{I}$ имеют общий нуль a. Следовательно, $\mathfrak{I} \subset \mathfrak{I}_a$. В силу максимальности $\mathfrak{I} = \mathfrak{I}_a$. $\square$