ЛЕКЦИЯ 4

Краткое содержание. Векторные поля.

Пусть $a \in M$, и $f \in \mathfrak{I}_a \subset C^\infty(M)$. Производная $f'(a)$ есть линейное отображение $T_a M \to \mathbb{R}$, т.е. элемент пространства $T_a^* M$.

Теорема 1. $f'(a) = 0$ *тогда и только тогда, когда* $f \in \mathfrak{I}_a^2$.

Доказательство. Пусть $f \in \mathfrak{I}_a^2$, т.е. $f = \sum_{i=1}^N g_i h_i$, где $g_1, \dots, g_N, h_1, \dots, h_N \in \mathfrak{I}_a$. Тогда $f'(a) = \sum_{i=1}^N (g_i(a) h_i'(a) + g_i'(a) h_i(a)) = 0$.

Обратно, пусть $f(a) = 0$ и $f'(a) = 0$. Рассмотрим систему координат (U, V, x) в окрестности точки a и положим $\varphi = f \circ x^{-1} : V \to \mathbb{R}$. Очевидно, $\varphi(q) = 0$ и $\varphi'(q) = 0$, где $q \stackrel{\text{def}}{=} x(a)$. Из теоремы 4 лекции 1 предыдущего семестра следует, что $\varphi \in \mathfrak{I}_q^2 \subset C^\infty(V)$, то есть существуют функции $\mu_1, \dots, \mu_N, \nu_1, \dots, \nu_N : V \to \mathbb{R}$ такие, что $\mu_i(q) = \nu_i(q) = 0$ при всех q, и $\varphi = \sum_{i=1}^N \mu_i \nu_i$.

Рассмотрим $\varepsilon > 0$ такое, что $B(q, 2\varepsilon) \subset V$ (B — шар), и пусть $\lambda : V \to \mathbb{R}$ — гладкая функция, равная 1 в шаре $B(q, \varepsilon)$ и равная 0 вне $B(q, 2\varepsilon)$. Положим $\widetilde{\varphi} \stackrel{\text{def}}{=} \varphi\lambda^2$, $\widetilde{\mu_i} = \mu_i \lambda$ и $\widetilde{\nu_i} = \nu_i \lambda$, тогда $\widetilde{\varphi} = \sum_{i=1}^N \widetilde{\mu_i}\widetilde{\nu_i} \in J_q^2$. С другой стороны, функцию $\Lambda \stackrel{\text{def}}{=} \lambda \circ x : U \to \mathbb{R}$ можно, очевидно, продолжить нулем на все M с сохранением гладкости; то же самое можно сделать с функциями $g_i \stackrel{\text{def}}{=} \mu_i \circ x$, $h_i \stackrel{\text{def}}{=} \nu_i \circ x$ и $\widetilde{f} \stackrel{\text{def}}{=} \widetilde{\varphi} \circ x$.

Имеем $\widetilde{f} = \sum_{i=1}^N g_i h_i \in J_a^2$. С другой стороны, $f - \widetilde{f} = f(1 - \Lambda^2) \in J_a^2$ (поскольку $\Lambda(a) = 1$) — следовательно, $f \in J_a^2$. $\square$

Следствие 1. $\mathfrak{I}_a / \mathfrak{I}_a^2 = T_a^* M$.

Доказательство. Из теоремы 1 вытекает, что $\mathfrak{I}_a / \mathfrak{I}_a^2$ инъективно отображается в $T_a^* M$. Пусть $(x_1, \dots, x_n)$ — система координат в окрестности точки a, и пусть Λ — функция из доказательства теоремы 1. Тогда функции $y_i(b) \stackrel{\text{def}}{=} \Lambda(b)(x_i(m) - x_i(a))$ равны нулю вне некоторой окрестности точки a и, следовательно, их можно продолжить нулем на все многообразие M с сохранением гладкости. Очевидно, $y_i(a) = 0$ (то есть $y_i \in \mathfrak{I}_a$), и $\langle y_i'(a), \frac{\partial}{\partial x_i}(a) \rangle = 1$. Отсюда вытекает, что функционалы $y_i'(a) : T_a M \to \mathbb{R}$ линейно независимы. Следовательно, образ $\mathfrak{I}_a / \mathfrak{I}_a^2$ при отображении в $T_a^* M$ имеет размерность не меньше $n = \dim T_a^* M$, то есть совпадает со всем $T_a^* M$. $\square$

Пусть E — гладкое векторное расслоение с базой B и проекцией $p : E \to B$. Сечением этого расслоения называется гладкое отображение $s : B \to E$, для которого $p \circ s = \mathrm{Id}_B$. Сечение касательного расслоения $TM \to M$ называется гладким векторным полем на многообразии M.

Значение $X(a)$ векторного поля в точке $a \in M$ является элементом векторного пространства $T_a M$. Это означает, что векторные поля можно складывать (поточечно: $(X + Y)(a) \stackrel{\text{def}}{=} X(a) + Y(a) \in T_a M$), а также умножать на число $f(a)$, гладко зависящее от точки a, т.е. на функцию $f \in C^\infty(M)$. Иными словами, векторные поля образуют модуль над алгеброй $C^\infty(M)$, обозначаемый $\mathrm{Vect}(M)$.

Для векторного поля X определен линейный оператор $\mathcal{L}_X : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ равенством $\mathcal{L}_X(f)(a) = \langle f'(a), X(a) \rangle$ (напомним, что $X(a) \in T_a M$, а $f'(a) \in T_a^* M$).

Теорема 2. *Линейный оператор* $\mathcal{L}_X$ *является дифференцированием алгебры* $C^\infty(M)$, *т.е. удовлетворяет тождеству Лейбница* $\mathcal{L}_X(fg) = f\mathcal{L}_X(g) + \mathcal{L}_X(f)g$. *Обратно, всякое дифференцирование алгебры* $C^\infty(M)$ *имеет вид* $\mathcal{L}_X$ *для некоторого векторного поля* X.

Доказательство. Тождество Лейбница следует из правила дифференцирования произведения функций. Обратно, пусть $r : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ — дифференцирование. Для каждой точки $a \in M$ определим функционал $r_a : \mathfrak{I}_a \to \mathbb{R}$ равенством $r_a(f) \stackrel{\text{def}}{=} r(f)(a)$. Пусть $f \in \mathfrak{I}_a^2$, то есть $f = \sum_i g_i h_i$, где $g_i(a) = h_i(a) = 0$ для всех i. Тогда $r_a(f) = \sum_i (g_i(a) r_a(h_i) + r_a(g_i) h_i(a) = 0$. Отсюда следует, что r_a является линейным отображением $\mathfrak{I}_a / \mathfrak{I}_a^2 \to \mathbb{R}$, то есть элементом $(\mathfrak{I}_a / \mathfrak{I}_a^2)^* = T_a M$ (следствие 1). Обозначим этот элемент $X(a) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^n p_i(a) \frac{\partial}{\partial x_i}(a)$, где x — какая-нибудь система координат в окрестности точки a.

Осталось доказать, что функции $\lambda_i(a)$ гладко зависят от a. Пусть $\Lambda \in C^\infty(M)$ — функция, подобная рассмотренной при доказательстве теоремы 1 ($\Lambda \equiv 1$ в окрестности точки a и $\Lambda \equiv 0$ вне карты U). Рассмотрим функции $\varphi_i(b) \stackrel{\text{def}}{=} \Lambda(b) x_i(b)$ при $b \in U$, а при $b \notin U$ положим $\varphi_i(b) = 0$. Как нетрудно видеть, $\varphi_i \in C^\infty(M)$ и $r(\varphi_i)(b) = p_i(b)$ при $b \in U$. Но r — оператор $C^\infty(M) \to C^\infty(M)$, так что функция $p_i(b)$ гладкая. $\square$

Следствие 2. *Пусть (U,V,x) — система координат на M, а $r : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ — произвольное дифференцирование. Тогда существуют (и единственны, конечно) гладкие функции $p_1,\dots,p_n : U \to \mathbb{R}$ такие, что $r(f)(a) = \sum_{i=1}^n r_i(a)\frac{\partial f\circ x^{-1}}{\partial x_i}(x(a))$ при каждом $a \in U$. В этом случае $F = \mathcal{L}_X$, где $X(a) = \sum_{i=1}^n p_i(a)\frac{\partial}{\partial x_i}(a)$ при $a \in U$.*

Следствие 3. *Оператор $\mathcal{L}_X : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ однозначно определяет векторное поле X.*

Предложение 1. *Пусть F, G — два дифференцирования коммутативной ассоциативной алгебры A. Тогда оператор $[F,G] = FG - GF$ также является дифференцированием (т.е. удовлетворяет тождеству Лейбница). Множество дифференцирований алгебры A с операцией $[\cdot,\cdot]$ является алгеброй Ли, то есть обладает следующими свойствами:*

1) $[F,G]$ зависит линейно от обоих аргументов.
2) (косая симметрия) $[G,F] = -[F,G]$.
3) (тождество Якоби) $[F,[G,H]] + [G,[H,F]] + [H,[F,G]] = 0$.

Доказательство — прямая проверка.

Из теоремы 2 и предложения 1 вытекает, что для двух векторных полей X, Y определено новое поле Z, для которого $\mathcal{L}_Z = [\mathcal{L}_X, \mathcal{L}_Y]$. Поле Z называется коммутатором полей X и Y и обозначается $Z = [X,Y]$. Из следствия 3 и предложения 1 вытекает, что множество $\mathrm{Vect}(M)$ векторных полей на многообразии M наделяется тем самым структурой алгебры Ли.

Предложение 2. *Пусть $X(a) = \sum_{i=1}^n p_i(a)\frac{\partial}{\partial x_i}(a)$ и $Y(a) = \sum_{i=1}^n q_i(a)\frac{\partial}{\partial x_i}(a)$ — векторные поля в открытом подмножестве $U \subset \mathbb{R}^n$ (с координатами $x_1,\dots,x_n$). Тогда $[X,Y](a) = \sum_{i=1}^n r_i(a)\frac{\partial}{\partial x_i}(a)$, где $r_i(q) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial p_j}{\partial x_i}(a)q_i(a) - p_i(a)\frac{\partial q_j}{\partial x_i}(a)$.*

Доказательство — прямое вычисление с использованием следствия 2.

Предложение 3. *Пусть X, Y — векторные поля на многообразии M, и $f \in C^\infty(M)$. Тогда $[X, fY] = f[X,Y] + (\mathcal{L}_X f)Y$.*

Доказательство. Из определения операции $\mathcal{L}$ вытекает, что $\mathcal{L}_{gZ} = g\mathcal{L}_Z$, где Z — произвольное векторное поле, а $g \in C^\infty(M)$. Имеем теперь $\mathcal{L}_{[X,fY]} = \mathcal{L}_X\mathcal{L}_{fY} - \mathcal{L}_{fY}\mathcal{L}_X = \mathcal{L}_X f\mathcal{L}_Y - f\mathcal{L}_Y\mathcal{L}_X = f(\mathcal{L}_X\mathcal{L}_Y - \mathcal{L}_Y\mathcal{L}_X) + (\mathcal{L}_X f)\mathcal{L}_Y$ (по тождеству Лейбница) $= f\mathcal{L}_{[X,Y]} + (\mathcal{L}_X f)\mathcal{L}_Y = \mathcal{L}_{f[X,Y]+(\mathcal{L}_X f)Y}$. Согласно следствию 3, отсюда вытекает доказываемое утверждение. $\square$

Теорема 3. *Пусть X — векторное поле на многообразии M. Тогда для каждой точки a существует $\varepsilon > 0$ и кривая $\gamma_a : (-\varepsilon,\varepsilon) \to M$ (называемая интегральной) такая, что $\gamma_a(0) = a$ и $\gamma_a'(t) = X(\gamma_a(t))$ для всех $t \in (-\varepsilon,\varepsilon)$. Две интегральных кривых γ_a одного и того же поля совпадают там, где обе определены. Точка $\gamma_a(t)$ гладко зависит от пары $(a,t) \in M \times \mathbb{R}$.*

Доказательство. Пусть (U,V,q) — карта в окрестности точки a. Определим функции $x_1,\dots,x_n : U \to \mathbb{R}$ равенством $X(b) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^m x_i(b)\frac{\partial}{\partial q_i}(b)$ при всех $b \in U$. Тогда кривая γ является интегральной, если $\frac{d(q\circ\gamma)}{dt}(t) = (x_1(\gamma(t)),\dots,x_n(\gamma(t)))$. Существование, единственность и гладкая зависимость от начальной точки вытекает теперь из соответствующей теоремы для систем дифференциальных уравнений. $\square$

Для каждого векторного поля X на многообразии M можно рассмотреть его поток — семейство преобразований $\Phi_X(t)$, где $\Phi_X(t)(a) \stackrel{\text{def}}{=} \gamma_a(t)$, где $\gamma_a : (-\varepsilon,\varepsilon) \to M$ — интегральная кривая поля X, проведенная через a. Отображение $\Phi_X(t)$ — гладкое, определено в некоторой окрестности $U \subset M$ точки a при каждом достаточно малом t; величина малости t зависит от выбранной окрестности.

Предложение 4. *Пусть X — векторное поле на многообразии M. Тогда для всех $a \in M$ и $t \in \mathbb{R}$ таких, что $b \stackrel{def}{=} \Phi_X(t)(a)$ определено, имеет место равенство $\Phi_X(-t)(b) = a$. Для всех $a \in M$ и $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ таких, что $b \stackrel{def}{=} \Phi_X(t_1)(a)$ и $c \stackrel{def}{=} \Phi_X(t_2)(b)$ определены, имеет место равенство $\Phi_X(t_1+t_2)(a) = c$.*

Доказательство. Если $b = \gamma_a(t)$, то из единственности интегральной кривой (теорема 3) вытекает, что $\gamma_b(s) = \gamma_a(s-t)$. Следовательно, $(\Phi_X(-t)(b) = \Phi_X(-t)(\gamma_a(t)) = \gamma_a(0) = a$. Второе равенство доказывается аналогично. $\square$

Следствие 4. *Отображение $\Phi_X(t)$ обратимо там, где определено.*

Пусть теперь X и Y — два векторных поля на многообразии M. Зафиксируем точку $a \in M$ и два достаточно малых числа $t, s \in (-\varepsilon,\varepsilon)$. Проведем через a интегральную траекторию γ_1 поля X. Затем через точку $\gamma_1(t)$ проведем интегральную траекторию γ_2 поля Y, затем через точку $\gamma_2(s)$ — интегральную траекторию γ_3 поля X, и, наконец, через точку $\gamma_3(-t)$ (обратите внимание на знак !) — интегральную траекторию γ_4 поля

Y. Обозначим $\Psi(t,s)(a) = \gamma_4(-s)$; тем самым получилось отображение $\Psi : (-\varepsilon,\varepsilon)^2 \times M \to M$. Из единственности интегральной траектории и ее гладкой зависимости от начальной точки следует, что $\Psi(t,s)(a) \to a$ при $s \to 0$ и фиксированном t; поэтому при любом t кривая $\psi_t(s) = \Psi(t,s)$ проходит при $s = 0$ через точку a, и определяет тем самым некоторый вектор $R(t) \in T_aM$. Вектор $Z(a) \stackrel{\text{def}}{=} R'(0)$ принадлежит T_aM; тем самым определено новое векторное поле Z.

Предложение 5. $Z = [X,Y]$.

Доказательство. Очевидно, утверждение теоремы носит локальный характер, так что достаточно доказать его в случае, когда M — открытое подмножество в $\mathbb{R}^n$. Обозначим $e_1,\dots,e_n$ стандартный базис в $\mathbb{R}^n$, и пусть $X(a) = \sum_{i=1}^n p_i(a)\frac{\partial}{\partial x_i}(a)$, $Y(a) = \sum_{i=1}^n q_i(a)\frac{\partial}{\partial x_i}(a)$. Тогда $\Phi_X(t)(a) = a + t\sum_{i=1}^n p_i(a)e_i + o(t)$ при $t \to 0$, и аналогично для Φ_Y. Отсюда несложными вычислениями получаем равенство $\Psi(t,s)a = a + ts\sum_{i,j=1}^n (p_i(a)\frac{\partial q_j}{\partial x_i}(a) - q_i(a)\frac{\partial p_j}{\partial x_i}(a))e_i + o(t^2+s^2)$ при $t,s \to 0$. Тем самым $Z(a) = \sum_{i,j=1}^n (p_i(a)\frac{\partial q_j}{\partial x_i}(a) - q_i(a)\frac{\partial p_j}{\partial x_i}(a))\frac{\partial}{\partial x_i}$, и утверждение вытекает из предложения 2. $\square$