ЛЕКЦИЯ 5

Краткое содержание. Теорема Фробениуса. Слабая теорема Уитни.

Предложение 1. *Если X, Y — векторные поля на многообразии M и $[X, Y] \equiv 0$, то $\Phi_X(t) \circ \Phi_Y(s) = \Phi_Y(s) \circ \Phi_X(t)$ для всех $t, s \in \mathbb{R}$ в тех точках, где обе композиции определены.*

Доказательство. Обозначим, как и выше, $\Psi(t, s) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \Psi_Y(-s) \circ \Psi_X(-t) \circ \Psi_Y(s) \circ \Psi_X(t)$. Пусть $a \in M$, $U \ni a$ — карта, а t и s малы настолько, что $\Psi(t, s)a$ определено и лежит в U. Тогда можно считать, что U — открытое подмножество в $\mathbb{R}^n$. Из предложений 2 и 5 лекции 4 вытекает, что $\Psi(t, s)(b) = b + o(t^2 + s^2)$ при $t, s \to 0$ и всяком $b \in U$, то есть $\Phi_X(t)\Phi_Y(s)(b) = \Phi_Y(s)\Phi_X(t)(b) + o(t^2 + s^2)$ при $t, s \to 0$.

Пусть теперь t и s произвольны, и $\Psi(t, s)a$ определено. Пусть $n \to \infty$, тогда имеем в силу следствия 4 лекции 4: $\Psi(t, s)(a) = \Phi_Y(-s/n)^n \Phi_X(-t/n)^n \Phi_Y(s/n)^n \Phi_X(t/n)^n(a) = \Phi_Y(-s/n)^n \Phi_X(-t/n)^n \Phi_Y(s/n)^{n-1} \Phi_X(t/n) \Phi_Y(s/n)(\Phi_X(t/n)^n$ $o(1/n^2))$ (точки $\Phi_X(t/n)^{n-1}(a)$ и $\Phi_X(t/n)^n(a)$ лежат, при достаточно большом n, в одной и той же карте, так что обозначение $o(1/n^2)$ при $n \to \infty$ имеет смысл). Повторяя эту процедуру n^2 раз (коммутируем каждый из n сомножителей $\Phi_X(t/n)$ с каждым из n сомножителей $\Phi_Y(s/n)$), получим, что $\Psi(t, s)(a) = \Phi_Y(-s/n)^n \Phi_X(-t/n)^n \Phi_X(t/n)^n \Phi_Y(s/n)^n(a) + n^2 o(1/n^2) = a + o(1)$ при $n \to \infty$. Поскольку $\Psi(t, s)(a)$ от n не зависит, получаем $\Psi(t, s)(a) = a$. $\square$

Семейство k-мерных подпространств $V(a) \subset T_a M$ называется гладким k-мерным распределением, если подпространства гладко зависят от точки a. Говорят, что гладкое отображение $f : N \to M$ — *интеграл* распределения V, если N — l-мерное многообразие (где $l \le k$), $\operatorname{Rk} f'(q) = l$ и $\operatorname{Im} f'(q) \subset V(f(q))$ при всех $q \in N$. Гладкое k-мерное распределение, такое что для каждой точки $a \in M$ существует интеграл $f : N \to M$ такой, что $\dim N = k$ и $a \in f(N)$, называется вполне интегрируемым.

Говорят, что векторное поле X на M касается распределения V, если $X(a) \in V(a)$ при всех $a \in M$. Поскольку $V(a) \subset T_a M$ — векторное подпространство, множество векторных полей, касающихся данного распределения, образует модуль над алгеброй $C^\infty(M)$ — подмодуль модуля $\operatorname{Vect}(M)$, обозначаемый $\operatorname{Vect}(M, V)$.

Теорема 1 (Фробениус). *Следующие утверждения эквивалентны:*

1) *Модуль $\operatorname{Vect}(M, V)$ замкнут относительно взятия коммутатора векторных полей (является подалгеброй Ли в $\operatorname{Vect}(M)$).*
2) *Для каждой точки $a \in M$ найдется семейство векторных полей $Y_1, \dots, Y_k$ и окрестность $U \ni a$ такие, что векторы $Y_1(b), \dots, Y_k(b)$ составляют базис в пространстве $V(b)$ при всех $b \in U$, и $[Y_i, Y_j](b) = 0$ при всех $b \in U$.*
3) *Распределение V вполне интегрируемо.*

Доказательство. Заметим, что все утверждения носят локальный характер, поэтому можно считать, что многообразие M — открытое подмножество в $\mathbb{R}^n$.

$1 \Longrightarrow 2$: выберем векторные поля $X_1, \dots, X_k$ в некоторой окрестности U точки a, такие что $X_1(b), \dots, X_k(b)$ — базис в $V(b)$ при всех $b \in U$. Пусть $X_i(b) = \sum_{i=1}^n \alpha_i^j(b) \frac{\partial}{\partial x_j}(b)$, $i = 1, \dots, k$. Поскольку векторы $X_i(b)$ при всех $b \in U$ порождают k-мерное пространство, матрица $(k \times n)$ $A = \alpha_i^j(b)$ имеет ранг k. Без ограничения общности можно считать, что ее самый левый минор $k \times k$ отличен от нуля. Следовательно, существует матрица $R = r_i^j(b)$, $i, j = 1, \dots, k$ (гладко зависящая от $b \in U$) такая, что RA — матрица $k \times n$, самая левая часть которой — единичная матрица $k \times k$. Следовательно, если $Y_i(b) = \sum_{j=1}^n r_i^j(b) X_j(b)$, то векторы $Y_1(b), \dots, Y_k(b)$ при каждом $b \in U$ являются базисом в пространстве $V(b)$, и $Y_i(b) = \frac{\partial}{\partial x_i}(b) + \sum_{j=k+1}^n \mu_i^j(b) \frac{\partial}{\partial x_j}(b)$.

Поскольку $Y_1, \dots, Y_k \in \operatorname{Vect}(M, V)$, имеем $[Y_i, Y_l](b) \in V(b)$ при всех $b \in U$ и $i, j = 1, \dots, k$. То есть $[Y_i, Y_l](b) = \sum_{q=1}^k \xi_{ij}^q(b) Y_q(b) = \sum_{q=1}^k \xi_{ij}^q(b) \frac{\partial}{\partial x_q}(b) + \sum_{q=1}^k \sum_{j=k+1}^n \mu_q^j(b) \frac{\partial}{\partial x_j}(b)$ для некоторых функций ξ_{ij}^p. Но поскольку $[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}] = 0$, вектор $[Y_i, Y_l](b)$ не может содержать базисных векторов $\frac{\partial}{\partial x_i}(b)$ с $1 \le i \le k$. Отсюда вытекает, что $\xi_{ij}^q \equiv 0$, и $[Y_i, Y_l] = 0$.

$2 \Longrightarrow 3$: пусть $\Phi_1(t), \dots, \Phi_k(t)$ — потоки полей $Y_1, \dots, Y_k$, определенные в некоторой окрестности U точки $a \in M$ при $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Определим отображение $f : (-\varepsilon, \varepsilon)^k \to M$ равенством $f(t_1, \dots, t_k) = (\Phi_1(t_1) \circ \dots \circ \Phi_k(t_k))(a)$. Пусть e_i $(i = 1, \dots, k$ — стандартный базисный вектор в $\mathbb{R}^k = T_{(t_1, \dots, t_k)}(-\varepsilon, \varepsilon)^k$. Тогда $f'(t_1, \dots, t_k)e_i = \frac{\partial}{\partial t_i} \Phi_i(t_i)(\Phi_1(t_1) \circ \dots \circ \widehat{\Phi_i(t_i)} \circ \dots \circ \Phi_k(t_k)(a))$ (в силу предложения 1) $= Y_i(f(t_1, \dots, t_k))$. Отсюда вытекает, что f — интеграл распределения V.

$3 \Longrightarrow 1$: пусть f — интеграл распределения V, $X_1, X_2 \in \mathrm{Vect}(M, V)$. Интегральные траектории полей X_1, X_2, проходящие через точки $a \in P \stackrel{\mathrm{def}}{=} f(N) \subset M$, лежат в P. Согласно предложению 5 лекции 4 из этого вытекает, что $[X_1, X_2](a)$ касается P, то есть лежит в $V(a)$. □

Пример 1. Рассмотрим в $\mathbb{R}^3$ с координатами x, y, z векторные поля $A = \frac{\partial}{\partial x}$ и $B = \frac{\partial}{\partial z} - x\frac{\partial}{\partial y}$. Они линейно независимы в каждой точке (почему ?); векторы $A(p,q,r), B(p,q,r) \in T_{(p,q,r)}\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^3$ порождают плоскость $\Pi \subset \mathbb{R}^3$, заданную уравнением $z + ay = 0$. Коммутатор $[A, B] = [\frac{\partial}{\partial x}, -x\frac{\partial}{\partial y}] = -\frac{\partial}{\partial y}$ не касается полученного распределения ($\Leftrightarrow$ не выражается в виде линейной комбинации A и B). Следовательно, распределение не вполне интегрируемо — не имеет проходящих через каждую точку двумерных интегралов. Одномерные интегралы у него имеются (как и у всякого распределения) — например, интегральные кривые полей A и B. Одномерные интегралы данного распределения называются лежандровыми кривыми в $\mathbb{R}^3$.

Гладкое отображение $f : M \to Q$ называется погружением, если $\mathrm{Rk}\, f'(a) = \dim M$ при всех $a \in M$ (в частности, отсюда следует, что $\dim Q \geq \dim M$). Погружение называется вложением, если $f(a) \neq f(b)$ при $a \neq b$. Согласно теореме о неявной функции, любое погружение есть локальное вложение: для всякой точки $a \in M$ найдется ее окрестность $U \ni a$ такая, что $f|_U : U \to Q$ — вложение.

Пример 2. Погружение $f : S^1 \to Q$ — гладкая замкнутая кривая. Вложение $f : S^1 \to Q$ — гладкая замкнутая кривая без точек самопересечения.

Предложение 2. *Для всякого компактного многообразия M существует вложение $f : M \to \mathbb{R}^N$, где N достаточно велико.*

Доказательство. Пусть $\dim M = n$. Рассмотрим на M атлас $\{(U_\alpha, V_\alpha, x_\alpha)\}$. Открытое множество $V_\alpha \subset \mathbb{R}^n$ можно представить в виде конечного или счетного объединения открытых шаров. Следовательно, можно считать, что все множества V_α — шары $B(0,1) \subset \mathbb{R}^n$ радиуса 1 с центром в начале координат. Поскольку M компактно, можно считать атлас конечным: $\{(U_1, V_1, x_1), \dots, (U_k, V_k, x_k)\}$.

Пусть $\varphi : B(0,1) \to S^n \setminus \{P\}$ — диффеоморфизм открытого шара в дополнение к северному полюсу сферы. Определим отображение $\Phi_i : M \to \mathbb{R}^{n+1}$, $i = 1, \dots, k$, так: $\Phi_i|_{U_i} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \iota \circ \varphi \circ x_i$, где $\iota : S^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ — стандартное вложение, а если $a \notin U_i$, то $\Phi_i(a) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \iota(P)$. Положим $N = (n+1)k$, и зададим $f : M \to \mathbb{R}^N$ равенством $f(a) = (\Phi_1(a), \dots, \Phi_k(a))$.

Отображение f — погружение, поскольку $\mathrm{Rk}\, \Phi_i'(a) = n = \dim M$ при $a \in U_i$. Если $a, b \in U_i$ и $a \neq b$, то $\Phi_i(a) \neq \Phi_i(b)$ и, следовательно, $f(a) \neq f(b)$. Если $a \in U_i$, $b \notin U_i$, то $\Phi_i(a) \neq \iota(P) = \Phi_i(b)$ и, следовательно, $f(a) \neq f(b)$. □

Замечание 1. На самом деле требование компактности в предложении 2 излишне — мы ввели его для упрощения доказательства.

Теорема 2 (слабая теорема Уитни). *Всякое компактное n-мерное многообразие M может быть вложено в $\mathbb{R}^{2n+1}$ и погружено в $\mathbb{R}^{2n}$.*

Доказательство. Пусть $f : M \to \mathbb{R}^N$ — какое-нибудь вложение. Мы докажем, что если $N > 2n + 1$, то существует гиперплоскость $\Pi \subset \mathbb{R}^N$ такая, что отображение $p_\Pi \circ f : M \to \Pi$ — вложение, где $p_\Pi : \mathbb{R}^N \to \Pi$ — ортогональная проекция.

Рассмотрим сначала множество PTM, элементы которого — одномерные подпространства (то есть прямые, проходящие через нуль) в касательных пространствах $T_a M$. Очевидно, что PTM обладает структурой гладкого многообразия размерности $2n-1$ (постройте атлас !). Определим отображение $g : PTM \to \mathbb{R}P^{N-1}$, сопоставляющее паре $(a, \ell) \in PTM$, где $a \in M$, $\ell \subset T_a M$, прямую ℓ: поскольку M вложено в $\mathbb{R}^N$, пространство $T_a M$ вложено в $T_{f(a)}\mathbb{R}^N = \mathbb{R}^N$, поэтому ℓ можно считать элементом $\mathbb{R}P^{N-1}$ (формально: пусть $v \in \ell \subset T_a M$ — ненулевой вектор. Тогда $g(a, \ell)$ — прямая, натянутая на ненулевой вектор $f'(a)v$). Поскольку $N-1 > 2n-1$, по лемме Сарда образ $g(PTM) \subset \mathbb{R}P^{N-1}$ имеет в $\mathbb{R}P^{N-1}$ меру нуль.

Рассмотрим теперь множество $Q = \{(a,b) \mid a, b \in M, a \neq b\}$. Это гладкое многообразие размерности $2n$ (почему ?). Определим отображение $h : Q \to \mathbb{R}P^{N-1}$: $h(a,b)$ — прямая, параллельная прямой, проведенной через $f(a$ и $f(b)$ (и проходящая через начало координат); поскольку f — вложение, эта прямая определена однозначно. Отображение гладкое, $N - 1 > 2n$, так что по лемме Сарда образ $h(Q) \subset \mathbb{R}P^{2N-1}$ также имеет меру нуль. Следовательно, существует прямая $\ell_0 \in \mathbb{R}P^{N-1}$, не принадлежащая ни $g(PTM)$, ни $h(Q)$. Если Π — гиперплоскость, ортогональная ℓ_0, то $p_\Pi \circ f : M \to \Pi = \mathbb{R}^{N-1}$ — вложение. Утверждение про вложение доказано.

Утверждение о погружении доказывается так же: в первой части рассуждения достаточно, чтобы M было погруженным многообразием. Вторая часть рассуждения не нужна, так что для существования гиперплоскости Π такой, что $p_\Pi \circ f$ — погружение, достаточно неравенства $N > 2n$. □

На самом деле в этой теореме можно, во-первых, отказаться от компактности, а во-вторых, уменьшить размерность на единицу (при $n > 1$): всякое n-мерное многообразие можно вложить в $\mathbb{R}^{2n}$ и погрузить в

$\mathbb{R}^{2n-1}$ (это называется “сильной теоремой Уитни”). В этом случае, однако, уже не удастся воспользоваться методом проекций: нетривиальный узел в $\mathbb{R}^3$ (образ вложения $f : S^1 \to \mathbb{R}^3$) нельзя спроектировать в $\mathbb{R}^2$ без самопересечений. Оценки $2n$ и $2n-1$ в сильной теореме Уитни уже нельзя улучшить (для всех n и всех многообразий сразу): S^1 нельзя вложить в $\mathbb{R}^1$, S^2 нельзя погрузить в $\mathbb{R}^2$ (докажите !).