ЛЕКЦИЯ 6

Краткое содержание. Функториальные операции с расслоениями. Дифференциальные формы.

Пусть E — векторное расслоение с базой B и проекцией $p : E \to B$. Зафиксируем на E какой-либо атлас $\{(U_i, V_i \times \mathbb{R}^k, x_i)\}$, и пусть $\varphi_{ij} = x_j \circ x_i^{-1} : V_i \times \mathbb{R}^k \to V_j \times \mathbb{R}^k$ — отображение перехода, имеющее вид $\varphi_{ij}(q, v) = (\psi_{ij}(q), A_{ij}(q)v)$. Имеют место равенства $A_{ij}(q) \circ A_{ji}(\psi_{ij}(q)) = \mathrm{id}$ и $A_{ij}(q) \circ A_{jk}(\psi_{ij}(q)) \circ A_{ki}(\psi_{ik}(q)) = \mathrm{id}$.

Рассмотрим теперь на той же базе B функции перехода вида $\varphi_{ij}^*(q) = (\psi_{ij}(q), (A_{ij}(q)^{-1})^* v)$, где звездочка означает сопряжение.

Предложение 1. *Отображения φ_{ij}^* являются функциями перехода некоторого векторного расслоения E^* с базой B. Слой $(p^*)^{-1}(b) \subset E^*$ этого расслоения над точкой $b \in B$ ($p^* : E^* \to B$ — проекция) естественно отождествляется с пространством, сопряженным к слою $p^{-1}(b)$ расслоения E над той же точкой.*

Доказательство. Если $A_1 \circ A_2 = \mathrm{id}$, то и $(A_1^{-1})^* \circ (A_2^{-1})^* = (A_2^{-1} \circ A_1^{-1})^* = ((A_1 \circ A_2)^{-1})^* = \mathrm{id}$, и аналогично для трех операторов. Отсюда вытекает, что функции перехода φ_{ij}^* задают векторное расслоение с базой B.

Пусть теперь $a \in E$, $\alpha \in E^*$ и $p(a) = b = p^*(\alpha)$. Пусть $(U_i, V_i \times \mathbb{R}^k, x_i)$ — карта в E такая, что $a \in U_i$, и $(U_i^*, V_i \times \mathbb{R}^k, x_i^*)$ — соответствующая карта в E^*. Поскольку $p(a) = p^*(\alpha)$, имеем $\alpha \in U_i^*$. Пусть $x_i(a) = (q, v)$ и $x_i^*(\alpha) = (q, w)$. Положим в этом случае $\langle \alpha, a \rangle \stackrel{\mathrm{def}}{=} (w, v)$ (скалярное произведение в $\mathbb{R}^k$). Это определение не зависит от выбора системы координат: если x_j, x_j^* — другие координаты, то $x_j(a) = (\psi_{ij}(q), A_{ij}(q)v)$, $x_j^*(\alpha) = (\psi_{ij}(q), (A_{ij}(q)^{-1})^* w)$, и $\left((A_{ij}(q)^{-1})^* w, A_{ij}(q)v\right) = (w, v)$. □

Следствие 1. *$C^\infty(B)$-модуль $\Gamma(E^*)$ сечений расслоения E^* изоморфен $C^\infty(B)$-модулю $\mathrm{Hom}(\Gamma(E), C^\infty(B))$ гомоморфизмов из модуля $\Gamma(E)$ сечений расслоения E в алгебру гладких функций на базе.*

E^* называется расслоением, сопряженным к E. Расслоение, сопряженное с касательным расслоением TM, называется кокасательным и обозначается T^*M. Гладкие сечения T^*M называются дифференциальными 1-формами на многообразии M. Если (U, V, x) — система координат на M, то в пространстве T_aM возникает базис $\frac{\partial}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}(a)$, а в двойственном пространстве T_a^*M можно рассмотреть двойственный базис; он обозначается $dx_1(a), \dots, dx_n(a)$. В силу предложения 1 всякая 1-форма на M записывается при $a \in U$ как $\nu(a) = \sum_{s=1}^n r_s(a)\, dx_s(a)$, а при замене координат $y_s = \varphi_s(x_1, \dots, x_n), s = 1, \dots, n$, ведет себя следующим образом: $dy_s(a) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \varphi_s}{\partial x_k}(x(a))\, dx_k(a)$.

Пример 1. Рассмотрим на окружности $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ стандартный атлас из двух карт $U_1 = (S^1 \setminus \{1\}, U_2 = (S^1 \setminus \{-1\}$. Координатные окрестности $V_1 = (0, 2\pi)$, $V_2 = (-\pi, \pi)$, координаты x_1, x_2 — взятие аргумента комплексного числа (берется значение аргумента в соответствующем интервале). Множества $V_{12} = (0, \pi) \cup (\pi, 2\pi)$, $V_{21} = (-\pi, 0) \cup (0, \pi)$, отображения перехода $\varphi_{12}(t) = t$ при $t \in (0, \pi)$ и $\varphi_{12}(t) = t - 2\pi$ при $t \in (\pi, 2\pi)$.

В карте U_1 можно определить дифференциальную 1-форму dx_1, а в карте U_2 — дифференциальную 1-форму dx_2. Поскольку $\varphi_{12}'(t) = 1$ при всяком t, имеем $dx_1 = dx_2$ там, где обе формы определены. Тем самым мы задали на всей окружности некоторую дифференциальную 1-форму, которая обычно обозначается $d\varphi$.

Определение сопряженного расслоения допускает значительное обобщение. Пусть Φ — ковариантный функтор на категории векторных пространств и изоморфизмов, т.е. способ сопоставить произвольному векторному пространству V другое пространство $\Phi(V)$, а произвольному обратимому линейному оператору $A : V \to W$ — обратимый линейный оператор $\Phi(A) : \Phi(V) \to \Phi(W)$, так что выполнены тождества $\Phi(A \circ B) = \Phi(A) \circ \Phi(B)$ и $\Phi(\mathrm{id_V}) = \mathrm{id}_{\Phi(V)}$ (и, следовательно, $\Phi(A^{-1}) = \Phi(A)^{-1}$). Тогда всякому векторному расслоению E с базой B можно сопоставить новое расслоение E^Φ, картами на котором будут $(V_i \times \Phi(\mathbb{R}^k), x_i)$, а функциями перехода — отображения $\varphi_{ij}^\Phi(q, v) \stackrel{\mathrm{def}}{=} (\psi_{ij}(q), \Phi(A_{ij}(q))v)$ (напомним, что оператор $A_{ij}(q)$ обязательно обратимый).

Предложение 2. *Пусть E — векторное расслоение с базой B и проекцией p: Определенные выше отображения перехода задают векторное расслоение E^Φ с базой B и отображением p^Φ, слой которого $(p^\Phi)^{-1}(b)$ над точкой $b \in B$ естественно отождествляется с пространством $\Phi(p^{-1}(b))$.*

Доказательство такое же, как у предложения 1.

Вот некоторые конструкции расслоений E^Φ:

Двойственное расслоение. Если $\Phi(V) = V^*$, а $\Phi(A) = (A^{-1})^* : V^* \to W^*$, то получается двойственное расслоение E^*.

Прямая сумма. Если $\Phi(V) = V \oplus V$, а $\Phi(A) = A \oplus A$, то получается сумма $E \oplus E$ векторного расслоения с самим собой — это векторное расслоение вдвое большего ранга. Так же можно определить $E \oplus E \oplus \dots \oplus E$ (k раз).

Тензорная степень. Если $\Phi(V) = V \otimes V$, а $\Phi(A) = A \otimes A$, то получается тензорный квадрат $E \otimes E \stackrel{\text{def}}{=} E^{\otimes 2}$ расслоения E — расслоение ранга s^2, где $s = \mathrm{Rk}(E)$. Аналогично можно определить k-ю тензорную степень $E^{\otimes k}$ — ее ранг равен s^k. Сечения расслоения $TM^{\otimes k}$ называются ковариантными k-тензорами на M (или k-поливекторными полями), а сечения $T^*M^{\otimes k}$ — контравариантными k-тензорами.

Пример 2. Рассмотрим на окружности $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ атлас, как в примере 1. Расслоение Мебиуса с базой S^1 имеет ранг 1. В рассматриваемом атласе отображение перехода расслоения Мебиуса $A_{12}(t)$ — матрица 1×1 (при каждом $t \in V_{12}$), то есть число, а именно $A_{12}(t) = 1$ при $t \in (0, \pi)$ и $A_{12}(t) = -1$ при $t \in (\pi, 2\pi)$.

Тензорный квадрат расслоения Мебиуса — расслоение ранга $1^2 = 1$. Его отображение перехода $A_{12}(t) \otimes A_{12}(t) = 1^2 = (-1)^2 = 1$ при всех t. Следовательно, тензорный квадрат — тривиальное одномерное расслоение. Тензорная k-я степень — расслоение Мебиуса при нечетном k и тривиальное при четном.

Согласно предложению 2, слой расслоения $E_b^{\otimes k} \stackrel{\text{def}}{=} (p^{\otimes k})^{-1}(b)$ можно отождествить с k-й тензорной степенью слоя $E_b \stackrel{\text{def}}{=} p^{-1}(b)$. Напомним, что имеется канонический изоморфизм между $V^{\otimes k}$ и множеством k-полилинейных форм на V^*: тензору $a_1 \otimes \dots \otimes a_k$ сопоставляется полилинейная функция $p_{a_1 \otimes \dots \otimes a_k}(\alpha_1, \dots, \alpha_k) = \langle \alpha_1, a_1 \rangle \dots \langle \alpha_k, a_k \rangle$; здесь $a_1, \dots, a_k \in V$, $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in V^*$. Таким образом, слой $E_b^{\otimes k}$ можно отождествить с множеством k-полилинейных форм на слое E_b^* двойственного расслоения.

Симметрический и внешний квадрат. На тензорном квадрате $V \otimes V$ любого пространства действует оператор I перестановки сомножителей: $I(v \otimes w) = w \otimes v$ на разложимых тензорах, а на остальные тензоры I продолжается по линейности. Тензоры, инвариантные относительно I, называются симметрическими и образуют пространство $\mathrm{Symm}(V, 2) \subset V \otimes V$. Размерность этого пространства равна $n(n+1)/2$ (где $n = \dim V$), и базис в нем составляют тензоры $e_i \cdot e_j = \frac{1}{2}(e_i \otimes e_j + e_j \otimes e_i)$, где $1 \le i \le j \le n$, и $e_1, \dots, e_n$ — какой-нибудь базис в V. Симметрический квадрат $\mathrm{Symm}(\cdot, 2)$ — функтор: каждому оператору $A : V \to W$ можно сопоставить оператор $\mathrm{Symm}(A, 2)$, которые действует на разложимые тензоры по формуле $\mathrm{Symm}(A, 2)(v \cdot w) = A(v) \cdot A(w)$, а на прочие тензоры продолжается по линейности (проверьте тождества !). Если в базисе $e_1, \dots, e_n$ оператор A имеет матрицу (α_i^j), то $\mathrm{Symm}(A, 2)(e_i \cdot e_j) = A(e_i) \cdot A(e_j) = \sum_{1 \le k < l \le n} (\alpha_i^k \alpha_j^l + \alpha_i^l \alpha_j^k) e_k \cdot e_l$, т.е. матричный элемент $(\mathrm{Symm}(A, 2))_{i,j}^{k,l} = \alpha_i^k \alpha_j^l + \alpha_i^l \alpha_j^k$.

Тем самым, у каждого расслоения E можно определить его симметрический квадрат $\mathrm{Symm}(E, 2)$. Его слой можно отождествить с симметрическим квадратом слоя расслоения E или с множеством симметрических билинейных форм на слое расслоения E^*.

Множество тензоров в $V \otimes V$, косоинвариантных относительно I ($I(x) = -x$), образует подмножество $\Lambda^2 V \subset V \otimes V$, называемое внешним квадратом V. Размерность $\Lambda^2 V$ равна $n(n-1)/2$, а базис в нем составляют векторы $e_i \wedge e_j \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}(e_i \otimes e_j - e_j \otimes e_i), 1 \le i < j \le n$. Внешний квадрат — также функтор: оператор $\Lambda^2 A$ действует на тензор $v \wedge w$ по формуле $\Lambda^2 A(v \wedge w) = A(v) \wedge A(w)$, а на остальные кососимметрические тензоры продолжается по линейности. Нетрудно проверить, что если $A = (\alpha_i^j)$ в базисе $e_1, \dots, e_n$, то $A^{\wedge 2} = (\alpha_i^k \alpha_j^l - \alpha_i^l \alpha_j^k)$ в базисе $e_i \wedge e_j$, $1 \le i < j \le n$.

Тем самым для каждого расслоения E существует его внешний квадрат $\Lambda^2 E$. Его слой можно отождествить с внешним квадратом слоя расслоения E или с множеством кососимметрических билинейных форм на слое двойственного расслоения E^*.

Сечения расслоения $\Lambda^2 T^* M$ называются дифференциальными 2-формами на многообразии M. В координатах они записываются как $\nu = \sum_{1 \le i < j \le n} r_{ij}(a)\, dx_i(a) \wedge dx_j(a)$, а при замене координат $y_s = \varphi_s(x_1, \dots, x_n)$, $s = 1, \dots, n$, ведут себя так: $dy_s(a) \wedge dy_t(a) = \sum_{1 \le i < j \le n} \left(\frac{\partial \varphi_s}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi_t}{\partial x_j} - \frac{\partial \varphi_s}{\partial x_j} \frac{\partial \varphi_t}{\partial x_i} \right) (x(a))\, dx_i(a) \wedge dx_j(a)$.

Пример 3. Стандартный атлас на сфере $S^2 = \{(a, b, c) \mid a^2 + b^2 + c^2 = 1\}$ состоит из двух карт $U_1 = S^2 \setminus \{(0, 0, 1)\}$ и $U_2 = S^2 \setminus \{(0, 0, -11)\}$, координатные окрестности $V_1 = V_2 = \mathbb{R}^2$, координатные отображения p_1 и p_2 — стереографические проекции. Тогда $V_{12} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} = V_{21}$, отображение перехода $\varphi_{12}(x, y) = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2} \right)$. Отображение перехода касательного расслоения $A_{12}(x, y) = \varphi'_{12}(x, y) = \frac{1}{(x^2+y^2)^2} \begin{pmatrix} y^2 - x^2 & -2xy \\ -2xy & x^2 - y^2 \end{pmatrix}$.

Внешний квадрат $\Lambda^2 TS^2$ имеет ранг $C_2^2 = 1$. Его отображение перехода это $B(x, y) = \det A(x, y) = \frac{1}{(x^2+y^2)^2}$ (понимаемое как матрица 1×1). Изменим координатные отображения касательного расслоения: $\widetilde{p_1}(a) = (x, y, v)$, то положим $q_1(a) \stackrel{\text{def}}{=} (x, y, (1 + (x^2 + y^2)^2) v)$, и аналогично если $\widetilde{p_2}(a) = (x, y, v)$, то $q_2(a) \stackrel{\text{def}}{=} (x, y, (1 +

$(x^2+y^2)^2)v)$. Как нетрудно проверить, отображение перехода в новых координатах есть $\tilde{A}_{12}(x,y)=1$, так что $\Lambda^2 TS^2$ — тривиальное одномерное расслоение.

Внешняя степень. В k-й тензорной степени $V^{\otimes k}$ можно рассмотреть подпространство $\Lambda^k V$, составленное из полностью кососимметричных тензоров. Базис в $\Lambda^k V$ составляют тензоры вида $e_{i_1}\wedge e_{i_2}\wedge\dots\wedge e_{i_k}=\frac{1}{k!}\sum_{\sigma\in\Sigma_k}\varepsilon(\sigma)e_{i_{\sigma(1)}}\otimes e_{i_{\sigma(2)}}\otimes\dots\otimes e_{i_{\sigma(k)}}$, где $1\le i_1<i_2<\dots<i_k\le n$, Σ_k — множество перестановок индексов $1\dots,k$, $\varepsilon(\sigma)=\pm1$ — знак перестановки (четность), а $e_1,\dots,e_n$ — какой-нибудь базис в V. Пространство $\Lambda^k V$ называется k-ой внешней степенью V, его размерность равна $C_n^k=n!/(k!(n-k)!)$.

Взятие k-ой внешней степени — функтор. Если задан оператор $A:V\to W$, то оператор $\Lambda^k A:\Lambda^k V\to\Lambda^k W$, по определению, действует на тензор $v_1\wedge\dots\wedge v_k$ по правилу $\Lambda^k A(v_1\wedge\dots\wedge v_k)=A(v_1)\wedge\dots A(v_k)$, а на прочие тензоры продолжается по линейности. Следовательно, для каждого векторного расслоения E ранга n определена его k-ая внешняя степень $\Lambda^k E$ — расслоение с той же базой ранга C_n^k. Слой расслоения $\Lambda^k E$ можно отождествить с k-ой внешней степенью слоя расслоения E (т.е. с множеством грассмановых многочленов степени k на этом слое) или с множеством полилинейных кососимметрических форм от k аргументов на слое двойственного расслоения E^*.

Гладкие сечения k-ой внешней степени $\Lambda^k T^*M$ кокасательного расслоения называются дифференциальными k-формами на многообразии M. Если (U,V,x) — карта на M и $a\in U$, то в T_a^*M имеется базис $dx_1(a),\dots,dx_n(a)$, а в $\Lambda^k T_a^*M$ — базис $dx_{i_1}(a)\wedge\dots\wedge dx_{i_k}(a)$, где $1\le i_1<i_2<\dots<i_k\le n$. Таким образом, дифференциальная k-форма представляется в виде $\nu=\sum_{1\le i_1<i_2<\dots<i_k\le n} r_{i_1,\dots,i_k}(a)\,dx_{i_1}(a)\wedge\dots\wedge dx_{i_k}(a)$, а при замене координат $y_s=\varphi_s(x_1,\dots,x_n)$, $s=1,\dots,n$, ведет себя так: $dy_{i_1}(a)\wedge\dots\wedge dy_{i_k}(a)=\sum_{1\le j_1<\dots<j_k\le n}\det\left(\frac{\partial\varphi_{i_s}}{\partial x_{j_t}}\right)(x(a))\,dx_{j_1}(a)\wedge\dots\wedge dx_{j_k}(a)$ (определитель берется у матрицы $k\times k$, элемент s-ой строки и t-го столбца которой равен $\frac{\partial\varphi_{i_s}}{\partial x_{j_t}}(x(a))$ — это k-минор $n\times n$-матрицы $\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j}(x(a))\right)$, соответствующий строкам $i_1,\dots,i_k$ и столбцам $j_1,\dots,j_k$). Согласно сказанному выше, k-форму можно отождествить с полилинейной кососимметрической формой со значениями в $C^\infty(M)$ от k векторных полей на многообразии M: если $X_i(a)=\sum_{j=1}^n q_{ij}(a)\frac{\partial}{\partial x_j}(a)$, $i=1,\dots,k$, то $(dx_{j_1}\wedge\dots dx_{j_k})(X_1,\dots,X_k)=\det\left(q_{sj_s}\right)_{s=1}^k$, а на все остальные k-формы это соответствие продолжается по линейности.