ЛЕКЦИЯ 8

Краткое содержание. Теорема Стокса.

Пусть ω — k-форма на многообразии M с атласом $\{(U_i, V_i, x_i)\}$. Определим $(k+1)$-форму $d\omega(x)$ при $x \in U_i$ равенством $d\omega = x_i^* d((x_i^{-1})^*\omega)$ ($(x_i^{-1})^*\omega$ — k-форма на $V_i \subset \mathbb{R}^n$, так что ее дифференциал определен). Это определение корректно: если $x \in U_i \cap U_j$ и $\varphi_{ij} = x_j \circ x_i^{-1}$, то $x_j^* d((x_j^{-1})^*\omega) = (\varphi_{ij} \circ x_i)^* d(x_j^{-1})^*\omega) = x_i^* \varphi_{ij}^* d(x_j^{-1})^*\omega)$ (предложение 1 лекции 7) $= x_i^* d(\varphi_{ij}^*(x_j^{-1})^*\omega)$ (предложение 4 лекции 7, свойство 3) $= x_i^* d((x_j^{-1} \circ \varphi_{ij})^*\omega)$ (предложение 1 лекции 7) $= x_i^* d((x_i^{-1})^*\omega)$.

Предложение 1. *Предложение 4 лекции 7 верно для форм на многообразиях.*

Доказательство очевидно.

Форма ω, для которой $d\omega = 0$, называется *замкнутой*; форма ω вида $\omega = d\nu$ — *точной*. Из предложения 1 следует, что любая точная форма замкнута. Обратное неверно:

Пример 1. Пусть $M = S^1$, и $\omega = d\varphi$ (определение см. пример 1 лекции 6). Очевидно, $d\omega = 0$, т.к. 2-форм на одномерном многообразии S^1 не существует. Пусть $\omega = df$, где $f \in C^\infty(S^1)$. Поскольку f непрерывна, она достигает максимума в некоторой точке $x \in S^1$. Тогда $df(x) = 0$, а форма $\omega = d\varphi$ нигде в нуль не обращается.

Носителем дифференциальной формы ω на многообразии M (обозначение $\operatorname{supp}\omega$) называется замыкание множества $\{x \in M \mid \omega(x) \neq 0\}$.

Предложение 2. *Пусть ω — $(n-1)$-форма с компактным носителем на многообразии с краем $\mathbb{R}^n_+ = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_1 \geq 0\}$. Тогда $\int_{\mathbb{R}^n_+} d\omega = \int_{\partial\mathbb{R}^n_+} \omega$.*

Доказательство. Пусть $\operatorname{supp}\omega$ лежит в некотором кубе $K \subset \mathbb{R}^n_+$, одна из граней которого лежит в $\partial\mathbb{R}^n_+$. Без ограничения общности можно считать, что $K = [0,1]^n$, а форма имеет вид $\omega(x) = f(x)\,dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_{n-1}}$. Пусть $\{1, 2, \dots, n\} = \{i_1, \dots, i_{n-1}\} \cup \{p\}$. Если $p \neq 1$, то $\iota^*\omega = 0$, где $\iota : \partial\mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}^n_+$ — вложение, и, следовательно, $\int_{\partial\mathbb{R}^n_+} \omega = 0$. С другой стороны, $\int_{\mathbb{R}^n_+} d\omega = \int_{[0,1]^n} (-1)^{p-1} \frac{\partial f}{\partial x_p}\,dx_1 \dots dx_n = (-1)^{p-1} \int_{[0,1]^{n-1}} \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_p}(x)\,dx_p\,dx_1 \dots \widehat{dx_p} \dots dx_n = 0$. Если $p = 1$, то $\int_{\partial\mathbb{R}^n_+} \omega = \int_{[0,1]^{n-1}} f(0, x_2, \dots, x_n)\,dx_2 \dots dx_n$ и $\int_{\mathbb{R}^n_+} d\omega = \int_{[0,1]^{n-1}} \left(\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(x)\,dx_1\right) dx_2 \dots dx_n = \int_{[0,1]^{n-1}} f(0, x_2, \dots, x_n)\,dx_2 \dots dx_n$. □

Теорема 1 (Стокс). *Пусть M — ориентированное n-мерное многообразие с краем, а ω — $(n-1)$-форма с компактным носителем на нем. Тогда $\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega$.*

Предполагается, что ориентация многообразия (без края) ∂M согласована с ориентацией M: если к положительно ориентированному базису $v_2, \dots, v_n \in T_a\partial M \subset T_a M$ добавить вектор $v_1 \in T_a M$, смотрящий наружу (уточните, что это значит !), то получится положительно ориентированный базис $v_1, \dots, v_n \in T_a M$. Под интегралом $\int_{\partial M} \omega$ подразумевается $\int_{\partial M} \iota^*\omega$, где $\iota : \partial M \to M$ — тавтологическое вложение (каждой точке ∂M соответствует она сама, но уже как элемент M).

Доказательство теоремы Стокса. Пусть $\{(U_i, V_i, x_i)\}$ — локально конечный атлас на M. В силу компактности существует такое N, что $\operatorname{supp}\omega \subset U_1 \cup \dots \cup U_N$, причем в силу локальной конечности можно предположить, что U_i с $i > N$ не пересекают $\operatorname{supp}\omega$. Тогда $\omega = \sum_{i=1}^N \varrho_i\omega$, где $\{\varrho_i\}$ — разбиение единицы, подчиненное $\{U_i\}$. В силу линейности достаточно доказать теорему для каждой формы $\omega_i \stackrel{\text{def}}{=} \varrho_i\omega$.

Имеем $\int_M d\omega_i = \int_{V_i} (x_i^{-1})^* d\omega_i$ (следствие теоремы 2 лекции 7) $= \int_{V_i} d(x_i^{-1})^*\omega_i$ (предложение 4 лекции 7, свойство 4) $= \int_{V_i \cap \mathbb{R}^n_+} (x_i^{-1})^*\omega_i$ (предложение 2) $= \int_{\partial M} \omega_i$. □

Следствие. *Если M — ориентированное n-мерное многообразие без края, а ω — $(n-1)$-форма с компактным носителем, то $\int_M d\omega = 0$.*

В частности, теорема Стокса верна для всякой формы ω, если многообразие M компактное. Для форм с некомпактными носителями теорема неверна:

Пример 2. Пусть $M = \mathbb{R}^1$, $\nu = dx/(1+x^2)$. Тогда $\nu = df$, где $f(x) = \operatorname{arctg} x$, край $\partial M = \varnothing$, но $\int_M \nu = \pi \neq 0$.

Теорема 2 (лемма Пуанкаре). *Пусть ω — замкнутая k-форма на $\mathbb{R}^n$, где $1 \leq k \leq n$. Тогда ω точна.*

Доказательство. Инукция по n. При $n=1$ обязательно $k=1$, и $\omega = f(x)\,dx$. Такая форма всегда замкнута (2-форм на $\mathbb{R}^1$ нет) и точна: $\omega = dg$, где $g(x) = \int_0^x f(t)\,dt$.

Пусть теперь для форма на $\mathbb{R}^{n-1}$ лемма Пуанкаре доказана. Представим $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^{n-1}$; координату в $\mathbb{R}^1$ обозначим t, а координаты в $\mathbb{R}^{n-1}$ — $x = (x_1, \dots, x_{n-1})$. Тогда $\omega = \omega_1(t,x) + dt \wedge \omega_2(t,x)$, где k-форма ω_1 и $(k-1)$-форма ω_2 не содержат dt.

Имеем $d\omega = d_x\omega_1 + dt \wedge \frac{\partial \omega_1}{\partial t} - dt \wedge d_x\omega_2$. Здесь d_x — оператор внешнего дифференцирования на многообразии (гиперплоскости) $M_t = \{t\} \times \mathbb{R}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$; поскольку формы ω_1 и ω_2 не содержат dt, их можно рассматривать как формы на этих многообразиях. Производная $\frac{\partial}{\partial t}$ понимается в обычном смысле: ω_1 рассматривается как отображение из $\mathbb{R}$ в векторное пространство k-форм на $\mathbb{R}^{n-1}$. Поскольку $d\omega = 0$, имеем $d_x\omega_1 = 0$ и $\frac{\partial \omega_1}{\partial t} = d_x\omega_2$.

Рассмотрим теперь $(k-1)$-форму $\nu = \nu_1 + dt \wedge \nu_2$. Уравнение $d\nu = \omega$ означает, что $d_x\nu_1 = \omega_1$ и $d_x\nu_2 = \frac{\partial \nu_1}{\partial t} - \omega_2$. Поскольку $d_x\omega_1 = 0$, уравнение $d_x\nu_1 = \omega_1$ разрешимо на любой гиперплоскости M_t по предположению индукции; выберем решения так, чтобы они гладко зависили от t. Теперь $d_x\left(\frac{\partial \nu_1}{\partial t} - \omega_2\right) = \frac{\partial}{\partial t} d_x\nu_1 - d_x\omega_2 = \frac{\partial \omega_1}{\partial t} - d_x\omega_2 = 0$. Следовательно, уравнение $d_x\nu_2 = \frac{\partial \nu_1}{\partial t} - \omega_2$ также разрешимо по предположению индукции. □

Разумеется, лемма Пуанкаре верна на любом многообразии, диффеоморфном $\mathbb{R}^n$, например, в открытом шаре.

Предложение 3. *Пусть ω — n-форма на $\mathbb{R}^n$, $\operatorname{supp}\omega \subset (0,1)^n$. Равенство $\int_{\mathbb{R}^n}\omega = 0$ выполнено тогда и только тогда, когда существует $(n-1)$-форма ν такая, что $d\nu = \omega$ и $\operatorname{supp}\nu \subset (0,1)^n$.*

Доказательство. Пусть такая форма ν существует. Рассмотрим шар $B \supset (0,1)^n$. Тогда $\operatorname{supp}\nu \subset B$ и по теореме Стокса $\int_{\mathbb{R}^n}\omega = \int_B \omega = \int_{\partial B}\nu = 0$.

Обратное утверждение при $n=1$ доказывается так же, как соответствующая часть леммы Пуанкаре: если $\omega = f(t)\,dt$, то $\omega = dg$, где $g(t) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^t f(\tau)\,d\tau$ имеет носитель в $(0,1)$, поскольку $\int_{-\infty}^1 f(\tau)\,d\tau = 0$.

Пусть теперь $n > 1$ и $\omega = f(x,t)\,dt \wedge dx$, где $x = (x_1, \dots, x_{n-1})$ и dx обозначает $dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{n-1}$. Положим $\mu = m(x)\,dx$, где $m(x) \stackrel{\text{def}}{=} \left(\int_0^1 f(x,t)\,dt\right) dx$. Применим индукцию по n: поскольку $\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\mu = 0$, существует $(n-2)$-форма ψ на $\mathbb{R}^{n-1}$ такая, что $\mu = d\psi$, и $\operatorname{supp}\psi \subset (0,1)^{n-1}$. Рассмотрим функцию $g(x,t) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^t f(x,\tau) - \varphi(\tau)m(x)\,d\tau$, где $\operatorname{supp}\varphi \subset (0,1)$ и $\int_0^1 \varphi(\tau)\,d\tau = 1$. Очевидно, $\operatorname{supp} g \subset (0,1)^n$. Положим $\nu = g(x,t)\,dx - \varphi(t)\,dt \wedge \psi$, тогда $\operatorname{supp}\nu \subset (0,1)^n$ и $d\nu = \frac{\partial g}{\partial t} dt \wedge dx + \varphi(t) dt \wedge d\psi = f(x,t)\,dt \wedge dx - \varphi(t)m(x)\,dt \wedge dx + \varphi(t)\,dt \wedge d\psi = \omega$. □

Пусть $f : M \to N$ — гладкое отображение ориентированных многообразий, $\dim M = \dim N = n$, M компактно, и $a \in N$. Рассмотрим n-форму ω на N такую, что $\operatorname{supp}\omega \subset U$, где $a \in U$ и $U \subset N$ диффеоморфно $(0,1)^n$ (т.е. шару), и $\int_N \omega = 1$. Положим по определению $\deg(f,a) \stackrel{\text{def}}{=} \int_M f^*\omega$.

Теорема 3. *Величина $\deg(f,a)$ определена корректно (не зависит от выбора формы ω). Если многообразие N связно, то $\deg(f,a)$ не зависит от выбора точки a и равно степени $\deg f$ отображения f.*

Доказательство. Пусть ω_1 — другая форма на N с теми же свойствами. Тогда $\int_N(\omega - \omega_1) = 0$, и по предложению 3 $\omega = \omega_1 + d\nu$, где $\operatorname{supp}\nu$ компактен. Тогда $\int_M f^*\omega = \int_M f^*\omega_1 + \int_M f^*\,d\nu = \int_M f^*\omega_1 + \int_M df^*\nu = \int_M f^*\omega_1$ по теореме Стокса.

Если точка a_1 достаточно близка к a, то форму ω можно выбрать для них общей. Следовательно, $\deg(f,a) = \deg(f,a_1)$, то есть функция $\deg(f,a)$ локально постоянна на N. Если N связно, то отсюда следует, что она постоянна.

Пусть теперь a — регулярное значение отображения f. Если окрестность U достаточно мала, то по теореме о неявной функции $f^{-1}(U) = \bigsqcup_{i=1}^N V_i$, причем $f|_{V_i} : V_i \to U$ — диффеоморфизм. Пусть $b_i \in V_i$, $f(b_i) = a$, и $\operatorname{supp}\omega \subset U$. Тогда $\operatorname{supp} f^*\omega \subset \bigcup_i V_i$, и $\int_M f^*\omega = \sum_{i=1}^N \int_{V_i} f^*\omega = \sum_{i=1}^N \operatorname{sign} f'(b_i) \int_N \omega = \deg(f)$. □

Следствие. *Если многообразие M компактно и ориентировано, N связно и ориентировано, $\dim M = \dim N = n$, $f : M \to N$ — гладкое отображение, и ω — n-форма с компактным носителем на N, то $\int_M f^*\omega = \deg(f)\int_N \omega$.*