ЛЕКЦИЯ 9

Краткое содержание. Производная Ли. Интеграл по подмногообразию.

Пусть X — векторное поле, а ω — k-форма на многообразии M. Обозначим Φ_t^X интегральный поток поля X за время t (т.е. преобразование $M \to M$, заключающееся в сдвиге на время t вдоль интегральных траекторий поля X); Φ_t^X это гладкое отображение, определенное в открытом подмножестве многообразия M (своем при каждом t). Положим по определению $\mathcal{L}_X\omega \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d}{dt}(\Phi_t^X)^*\omega\big|_{t=0}$. Оператор $\mathcal{L}_X$ называется производной Ли вдоль векторного поля X; для функций (т.е. 0-форм) он совпадает с оператором $\mathcal{L}_X$, введенным ранее. Пусть $\iota_X\omega$ — $(k-1)$-форма, задаваемая равенством $(\iota_X\omega)(a)(v_1,\dots,v_{k-1}) = \omega(a)(X(a),v_1,\dots,v_{k-1})$, где $a \in M$ и $v_1,\dots,v_{k-1} \in T_aM$. Если $k=0$ (т.е. ω — функция), положим по определению $\iota_X\omega = 0$.

Линейный оператор A в алгебре $\Omega(M)$ всех дифференциальных форм на M называется дифференцированием, если $A(\omega_1\wedge\omega_2) = (A\omega_1)\wedge\omega_2 + \omega_1\wedge(A\omega_2)$ для всех форм ω_1,ω_2; называется супердифференцированием (или косым дифференцированием), если $A(\omega_1\wedge\omega_2) = (A\omega_1)\wedge\omega_2 + (-1)^k\omega_1\wedge(A\omega_2)$, если ω_1 — k-форма (а ω_2 произвольна).

Взаимоотношения между производной Ли $\mathcal{L}_X$, оператором подстановки ι_X и оператором внешнего дифференцирования d на алгебре $\Omega(M)$ таковы:

Предложение 1. *1) Оператор $\mathcal{L}_X$ является дифференцированием, а операторы ι_X и d — супердифференцированиями.*
2) $\iota_X\iota_Y = -\iota_Y\iota_X$ для любых векторных полей X и Y.
3) $\mathcal{L}_X d = d\mathcal{L}_X$ для любого векторного поля X.
4) $\mathcal{L}_X\mathcal{L}_Y = \mathcal{L}_Y\mathcal{L}_X + \mathcal{L}_{[X,Y]}$ для любых X и Y.
5) $\mathcal{L}_X = \iota_X d + d\iota_X$ для любого X.
6) $\iota_X\mathcal{L}_Y = \mathcal{L}_Y\iota_X + \iota_{[X,Y]}$ для любых X и Y.

Доказательство. 1. Очевидно, $(\Phi_t^X)^*(\omega_1\wedge\omega_2) = ((\Phi_t^X)^*\omega_1)\wedge((\Phi_t^X)^*\omega_2)$, откуда вытекает, что $\mathcal{L}_X$ — дифференцирование. Тот факт, что ι_X — супердифференцирование, вытекает из определения внешнего произведения, а то, что d — супердифференцирование, доказано в лекции 8 (предложение 1).

2 вытекает из косой симметрии дифференциальных форм.

3. Согласно предложению 1 лекции 8, $d(\Phi_t^X)^*\omega = (\Phi_t^X)^*d\omega$, откуда $\mathcal{L}_X d\omega = d\mathcal{L}_X\omega$.

4. Согласно пункту 3, коммутатор $[\mathcal{L}_X,\mathcal{L}_Y] \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{L}_X\mathcal{L}_Y - \mathcal{L}_Y\mathcal{L}_X$ комммутирует с d и сохраняет валентность формы (переводит k-формы в k-формы). Согласно пункту 1, операторы $\mathcal{L}_X$ и $\mathcal{L}_Y$ — дифференцирования, поэтому $[\mathcal{L}_X,\mathcal{L}_Y]$ тоже дифференцирование (коммутатор двух дифференцирований любой ассоциативной алгебры — дифференцирование, ср. предложение 1 лекции 4). Поскольку любая форма ν локально представима в виде $f\wedge dx_1\wedge\dots\wedge dx_k$, где $f,x_1,\dots,x_k$ — функции (т.е. 0-формы), равенство $[\mathcal{L}_X,\mathcal{L}_Y] = \mathcal{L}_{[X,Y]}$ достаточно проверить для функций. Но для функций оно уже доказывалось — предложение 5 лекции 4.

5. Правая часть равенства (обозначаемая $\{\iota_X,d\}$ — суперкоммутатор) сохраняет валентность формы и коммутирует с d: $d\{\iota_X,d\} = d\iota_X d = \{\iota_X,d\}d$ (поскольку $d^2=0$). Поскольку ι_X и d — супердифференцирования, $\{\iota_X,d\}$ является дифференцированием (проверяется аналогично предложению 1 лекции 4). Следовательно, равенство достаточно проверить для 0-форм, т.е. функций. Если в некоторой системе координат x функция есть $f(x)$, а векторное поле $X = \sum_{i=1}^n A_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}$, то $d\iota_X f = 0$, $\iota_X df = \sum_{i=1}^n A_i(x)\frac{\partial f}{\partial x_i} = \mathcal{L}_X f$.

6. Непосредственное вычисление показывает, что $\{[\iota_X,\mathcal{L}_Y],d\} = [\{\iota_X,d\},\mathcal{L}_Y] = [\mathcal{L}_X,\mathcal{L}_Y]$ (пункт 5) $= \mathcal{L}_{[X,Y]}$ (пункт 4) $= \{\iota_{[X,Y]},d\}$ (пункт 5). Оператор $[\iota_X,\mathcal{L}_Y]$ является супердифференцированием и понижает валентность формы на 1. Поэтому равенство достаточно проверить для 0-форм (функций), где оно имеет вид $0=0$. $\square$

Теорема 1. *Пусть ω — k-форма на многообразии M, а $X_1,\dots,X_{k+1}$ — векторные поля на M. Тогда* $d\omega(X_1,\dots,X_{k+1}) = \sum_{p=1}^{k+1}(-1)^{p-1}\mathcal{L}_{X_p}(\omega(X_1,\dots,\widehat{X_p},\dots,X_{k+1})) +$
$+\sum_{1\le p<q\le k+1}(-1)^{p+q}\omega([X_p,X_q],X_1,\dots,\widehat{X_p},\dots,\widehat{X_q},\dots,X_{k+1})$.

Доказательство. В обозначениях предложения 1 доказываемая формула выглядит так: $\iota_{X_{k+1}}\dots\iota_{X_1}d = \sum_{p=1}^{k+1}(-1)^{p-1}\mathcal{L}_{X_p}\iota_{X_{k+1}}\dots\widehat{\iota_{X_p}}\dots\iota_{X_1} + \sum_{1\le p<q\le k+1}\iota_{X_{k+1}}\dots\widehat{\iota_{X_q}}\dots\widehat{\iota_{X_p}}\dots\iota_{X_1}\iota_{[X_p,X_q]}$.

Доказательство — индукция по k. При $k=0$ вторая сумма отсутствует, и формула записывается как $\iota_{X_1}d\omega = \mathcal{L}_{X_1}\omega$ для всякой 1-формы ω, что вытекает из пункта 5 предложения 1. Пусть для $(k-1)$-форм формула доказана. Тогда $\iota_{X_{k+1}}\dots\iota_{X_1}d = -\iota_{X_{k+1}}\dots\iota_{X_2}d\iota_{X_1} + \iota_{X_{k+1}}\dots\iota_{X_2}\mathcal{L}_{X_1}$ (предложение 1, пункт 5)

$= -\sum_{p=2}^{k+1}(-1)^p \mathcal{L}_{X_p}\iota_{X_{k+1}}\dots\widehat{\iota_{X_p}}\dots\iota_{X_2}\iota_{X_1} - \sum_{2\le p<q\le k+1}\iota_{X_{k+1}}\dots\widehat{\iota_{X_q}}\dots\widehat{\iota_{X_p}}\dots\iota_{X_2}\iota_{[X_p,X_q]}\iota_{X_1} + \iota_{X_{k+1}}\dots\iota_{X_2}\mathcal{L}_{X_1}$ (предполжение индукции; обратите внимание на знаки). Несложной индукцией по k с использованием пункта 6 предложения 1 показывается (проделайте !), что $\iota_{X_{k+1}}\dots\iota_{X_2}\mathcal{L}_{X_1} = \mathcal{L}_{X_1}\iota_{X_{k+1}}\dots\iota_{X_2} + \sum_{q=2}^{k+1}(-1)^{q-1}\iota_{X_{k+1}}\dots\widehat{\iota_{X_q}}\dots\iota_{X_2}\iota_{[X_1,X_q]}$, откуда и получается нужное утверждение. □

Напомним, что погружением называется такое гладкое отображение $f : N \to M$, что $\operatorname{rk} f'(x) = \dim N$ при всех $x \in N$.

Теорема 2*. *Дифференциальная k-форма ω точна тогда и только тогда, когда для любого погружения $f : N \to M$ с компактным ориентированным N размерности k имеет место равенство $\int_N f^*\omega = 0$. Дифференциальная k-форма ω замкнута тогда и только тогда, когда для любого гладкого семейства погружений $f_t : N \to M$ с компактным ориентированным N размерности k величина $\int_N f_t^*\omega$ не зависит от t.*

Мы докажем эту теорему не полностью: часть “только тогда” первого утверждения — только в случае $\dim N = 1$ (а остальные утверждения целиком).

Доказательство. Пусть ω точна: $\omega = d\nu$. Тогда $\int_N f^*\omega = \int_N df^*\nu = 0$ по теореме Стокса (N не имеет края).

Пусть ω — 1-форма такая, что $\int_{S^1} f^*\omega = 0$ для каждого погружения (т.е. гладкой замкнутой кривой) $f : S^1 \to M$. Без ограничения общности M связно. Пусть $a \in M$; определим функцию $g : M \to \mathbb{R}$ равенством $g(b) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^1 \gamma_{ab}^*\omega$, где $\gamma_{ab} : [0,1] \to M$ — гладкая кривая, соединяющая a и $b \in M$. От выбора кривой g не зависит в силу условия теоремы. Тогда для всякого вектора $v \in T_bM$, представляемого кривой $\psi : \mathbb{R} \to M$, имеем $\langle dg, v\rangle = \frac{d}{dt}\int_0^t \psi^*\omega\Big|_{t=0} = \omega(b)$, то есть $\omega = dg$ точна.

Пусть ω замкнута. Определим отображение $F : N \times \mathbb{R} \to M$ формулой $F(t,a) = f_t(a)$. Тогда по теореме Стокса $\int_N f_t^*\omega - \int_N f_0^*\omega = \int_{N\times[0,1]} F^*d\omega = 0$.

Пусть теперь $\int_N f_t^*\omega = const.$ для любого семейства погружений. Для произвольного погружения f, числа $t \in \mathbb{R}$ и любого векторного поля X на M определим $f_t(a) \stackrel{\text{def}}{=} \Phi_t^X(f(a))$. Тогда $\frac{d}{dt}f_t^*\omega = \mathcal{L}_X\omega$, откуда вытекает, что $0 = \int_N f^*\mathcal{L}_X\omega = \int_N f^*(d\iota_X\omega + \iota_X d\omega) = \int_N f^*\iota_X d\omega$ (по теореме Стокса). Пусть $d\omega(a) \ne 0$. Тогда в малой окрестности U точки a найдутся $(k+1)$ линейно независимых векторных полей $Y_1,\dots,Y_{k+1}$ таких, что $d\omega(Y_1,\dots,Y_{k+1}) > 0$ (при всех $b \in U$). Определим векторные поля $X_1,\dots,X_{k+1}$ формулами $X_i = \varrho Y_i$, где ϱ — положительная бесконечно гладкая функция с носителем в U. Существует погружение сферы $f : S^k \to M$ такое, что $f'(a)T_aS^k \subset T_{f(a)}M$ — подпространство, порожденное векторами $X_1(a),\dots,X_k(a)$. Тогда $\int_{S^k} f^*\iota_{X_{k+1}}d\omega > 0$ (если U достаточно мало). □