Анализ, 3 семестр (осень 2006)
Повторный экзамен 18 февраля 2007
Решения сдавать С. М. Львовскому в ком. 301
до 9 марта включительно

Работа должна начинаться с титульного листа, на котором написаны только фамилия, имя и отчество сдающего.

1. Пусть $S \subset \mathbb{R}^3$ — эллипсоид, заданный уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Найдите $\int_S (x dy \wedge dz + y dz \wedge dx + z dx \wedge dy)$.

2. Пусть $f\colon S^1 \to \mathbb{R}^2$ — иммерсия (т. е. гладкое отображение, производная которого в каждой точке имеет нулевое ядро), и пусть $\omega = x^3 dy - y^3 dx$. Покажите, что если $\int_{S^1} f^*\omega = 0$, то f не является вложением.

3. На пространстве $\mathbb{R}^5$ рассмотрим форму $\omega = dx_1 + x_2 dx_3 + x_4 dx_5$.

а) Вычислите $\omega \wedge d\omega \wedge d\omega$.

б) Докажите, что не существует гладкого вложения $i\colon S \hookrightarrow \mathbb{R}^5$, где S — трехмерное многообразие, для которого $i^*\omega = 0$.

4. Существует ли иммерсия $f\colon S^2 \to \mathbb{R}^2$ (определение иммерсии см. в задаче 2)?

5. Пусть $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ — стандартная сфера единичного радиуса, а X — касательное векторное поле единичной длины на ней. Отображение $\Phi\colon S^n \times [0, \ell] \to \mathbb{R}^{n+1}$ задано формулой $\Phi(r, t) = r + tX(r)$; здесь $0 < \ell < 1$.

а) Вычислите $\det \Phi'(r, t)$ (базис в $T_r S^n$ — произвольный ортогональный, а в $T_t[0, \ell] = \mathbb{R}$ и в $T_{\Phi(r,t)}\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^{n+1}$ — стандартный).

б) Вычислите объем множества $M_\ell = \Phi(S^n \times [0, \ell])$.

в) Докажите, что M_ℓ является многообразием с краем, и опишите его край.

г) Выведите из результатов пунктов (в) и (г), что n нечетно.