ПРОГРАММА КУРСА

Вопросы, отмеченные звездочками, на лекциях не обсуждались; знать ответы на них не обязательно.

1. Основные определения (некоторые включают в себя проверку корректности !). Кроме знания собственно определений, необходимо уметь все выписывать в координатах: атлас в TM, коммутатор векторных полей, производную Ли формы, и т.п.

1) Гладкое многообразие. Многообразие с краем. Векторное расслоение. *Гладкое расслоение.
2) Структура векторного расслоения в TM. Производная гладкого отображения многообразий.
3) *Структура многообразия на множестве замкнутых максимальных идеалов в $C^\infty(M)$. Структура векторного расслоения на множестве всех $\mathfrak{I}_a/\mathfrak{I}_a^2$.
4) Векторное поле. Коммутатор векторных полей.
5) Функториальные операции с расслоениями: двойственное расслоение, тензорное произведение, симметрическая и внешняя степень. Дифференциальные формы.
6) Обратный образ контравариантного тензора.
7) Интеграл от дифференциальной формы.
8) Производная Ли контравариантного (*произвольного) тензорного поля.
9) Расслоение струй.
10) Трансверсальность двух отображений.

2. Основные утверждения

1) Многообразие с краем — объединение внутренности и края. Край многообразия — многообразие без края.
2) Любое многообразие паракомпактно.
3) Теорема о разбиении единицы.
4) Описание множества максимальных идеалов в алгебре $C^\infty(M)$.
5) $\mathfrak{I}_a/\mathfrak{I}_a^2 = T_a^*M$.
6) Векторные поля = дифференцирования алгебры $C^\infty(M)$.
7) $[X, fY] = f[X,Y] + (\mathcal{L}_X f)Y$.
8) Геометрическое описание коммутатора векторных полей.
9) Если векторные поля коммутируют ($[X,Y]=0$), то их потоки коммутируют ($\Phi_t^X \circ \Phi_s^Y = \Phi_s^Y \circ \Phi_t^X$).
10) Теорема Фробениуса для векторных полей.
11) Теорема Уитни о вложимости компактного (*произвольного) n-мерного многообразия в $\mathbb{R}^{2n+1}$.
12) Ориентируемость многообразия эквивалентна существованию не обращающейся в нуль формы старшей степени.
13) Операции тензорного умножения, внешнего умножения и внешнего дифференцирования форм естественны (т.е. коммутируют с операцией обратного образа).
14) Внешний дифференциал удовлетворяет супертождеству Лейбница. $d^2 = 0$.
15) Теорема Стокса.
16) Лемма Пуанкаре.
17) “Лемма Пуанкаре” с компактными носителями.
18) Описание степени отображения через интегралы от форм.
19) Взаимоотношения операторов $\mathcal{L}_X$, d и ι_X.
20) *Производная Ли векторного поля X по векторному полю Y равна $[Y,X]$. Вывести отсюда утверждение 7.
21) Формула Картана для внешнего дифференциала формы.
22) Характеристика точных и замкнутых форм через интегралы по подмногообразиям. *Если интеграл по любому подмногообразию нуль, то форма точна.
23) Теорема Фробениуса для дифференциальных форм.
24) Векторные расслоения E и E^* изоморфны.
25) Теорема Бэра.
26) Полнота пространства C^k.
27) Теорема Тома о трансверсальности.