НЕЗАВИСИМЫЙ МОСКОВСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

13 сентября 2006 г. 1-ый курс

ГЕОМЕТРИЯ
Листок № 2

(1) Правильная шестиугольная пирамида вписана в сферу S^2. Найдите ее группу изометрии и группу движений. Как соотносится Ваш ответ с теоремой о конечных подгруппах группы $SO(3)$?

(2) Ответьте на те же вопросы для
   (a) правильной шестиугольной призмы;
   (b) правильной усеченной пятиугольной пирамиды;
   (c) двойной правильной шестиугольной пирамиды (т.е. объединения двух правильных шестиугольных пирамид с общим основанием и вершинами в полюсах сферы S^2).

(3) Пусть G^+ — конечная подгруппа группы $SO(3)$, действующая на сферу S^2, и F — множество неподвижных точек всех неединичных элементов группы G^+ в этом действии. Докажите, что множество F инвариантно относительно действия группы G^+ и

$$|F| = |G| \cdot |A| - 2((|G| - 1),$$

где $A \subset F$ — множество, содержащее ровно по одной точке из каждой орбиты действия группы G^+ на множестве F.

(4) Есть ли в группе движений куба подгруппа, изоморфная группе движений тетраэдра?

(5) Есть ли в группе движений додекаэдра подгруппа, изоморфная группе движений куба?

(6) В группе $S^+(I^3)$ движений куба найдите все подгруппы, изоморфные $\mathbb{Z}_n$ и $\mathbb{D}_n$. Если ли другие подгруппы?

(7) * Докажите существование додекаэдра.

(8) Множество F состоит из центров граней, середин ребер и вершин куба, а G^+ — группа движений куба. Докажите, что группа G^+ действует на множестве F и найдите орбиты этого действия и стабилизаторы всех точек.

(9) Тот же вопрос для (a) тетраэдра; (b)* додекаэдра.

(10) Опишите группу изометрий плоскости, сохраняющую правильную (a) квадратную;(b) треугольную; (c) шестиугольную сетку.