НЕЗАВИСИМЫЙ МОСКОВСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

4 октября 2006 г. 1-ый курс

ГЕОМЕТРИЯ
Листок № 5

Во всех задачах a, b, c — стороны, а α, β, γ — противоположные углы сферического треугольника. Радиус сферы $R = 1$.

(1) Докажите первую теорему косинусов на сфере S^2:

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha.$$

(2) Докажите вторую теорему косинусов на сфере S^2:

$$\cos \alpha = -\cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos a.$$

(3) Докажите, что $a + b + c < 2\pi$.

(4) Существует ли отображение области сферы на область плоскости, переводящее отрезки сферических прямых в отрезки евклидовых прямых?

(5) Пролетает ли рейс Москва-Нью Йорк над Испанией? (Дайте примерный ответ, не глядя на атлас, и точный — глядя на глобус.)

(6) Как изменяется сумма углов равностороннего треугольника при изменении длины его стороны? (Дайте точную верхнюю и точную нижнюю оценки.)

(7) Город A находится на расстоянии 1000 км от городов B и C. Траектории рейсов от A к B и от A к C перпендикулярны. Найдите расстояние между городами B и C. (Можете считать, что радиус Земли равен 6400 км.

(8) Найдите площадь сферического круга радиуса r (Ответ: $4\pi \sin^2 \frac{r}{2}$.)

(9) Найдите фундаментальную область при действии групп симметрии тетраэдра, куба и додекаэдра на двумерной сфере и сосчитайте число их различных образов при действии соответствующей группы. Какие из них являются многоуголькиками Кокстера?

(10) Докажите, что у любого сферического треугольника существуют вписанная и описанная окружности.

(11) Докажите, что (а) медианы, (б) высоты сферического треугольника пересекаются в одной точке.