НЕЗАВИСИМЫЙ МОСКОВСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

18 октября 2006 г. 1-ый курс

ГЕОМЕТРИЯ
Листок № 7

(1) Докажите, что
  (a) дробно-линейные преобразования сохраняют двойное отношение четырех точек на расширенной комплексной плоскости;
  (b) любое преобразование расширенной комплексной плоскости, сохраняющее двойное отношение, является дробно-линейным;
  (c) дробно-линейное преобразование однозначно определяется образами трех точек.

(2) Докажите, что инверсии сохраняют двойное отношение точек, лежащих на одной гиперболической прямой.

(3) Докажите, что все собственные движения модели Пуанкаре в единичном круге имеют вид

$$z \mapsto \frac{az+b}{\bar{b}z+\bar{a}},$$

где a, b — такие комплексные числа, что $|a|^2 - |b|^2 = 1$.

(4) a) Докажите, что если a — расстояние от точки A до прямой l, а α — угол параллельности для A и l, то

$$a = c \ln \left(\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \right)$$

b) Докажите эквивалентность предыдущей формулы следующим:

$$\operatorname{ch}\left(\frac{a}{c}\right) \sin\alpha = 1; \quad \operatorname{sh}\left(\frac{a}{c}\right) \operatorname{tg}\alpha = 1; \quad \operatorname{th}\left(\frac{a}{c}\right) = \cos\alpha.$$

(5) Докажите, что стороны и углы треугольника с прямым углом γ связаны следующими соотношениями:

$$\operatorname{sh} a = \operatorname{sh} c \sin\alpha; \quad \operatorname{th} b = \operatorname{th} c \cos\alpha; \quad \operatorname{ctg}\alpha \operatorname{ctg}\beta = \operatorname{ch} c; \quad \cos\alpha = \operatorname{ch} a \sin\beta.$$

В какие соотношения они переходят при малых a, b и c?

(6) Докажите, что стороны и углы треугольника связаны следующими соотношениями:

$$a) \operatorname{ch} a \sin\beta = \operatorname{ch} b \sin\alpha \cos\gamma + \cos\alpha \sin\gamma;$$

$$b) \operatorname{ch} a = \frac{\cos\alpha + \cos\beta\cos\gamma}{\sin\beta \sin\gamma}.$$

(7) Докажите, что если соответственные углы двух треугольников равны, то равны и сами треугольники.

(8) Докажите, что все точки евклидовой прямой $y = kx$, лежащие в верхней полуплоскости, равноудалены от гиперболической прямой Oy.

(9) (a) Докажите, что гиперболическая окружность в любой из моделей Пуанкаре является евклидовой окружностью.
(b) Для модели Пуанкаре в верхней полуплоскости найдите центр и радиус евклидовой окружности, являющейся гиперболической окружностью радиуса r с центром в точке (a, b).
(c) Для модели Пуанкаре в круге H найдите соотношение между гиперболическим и евклидовым радиусами окружности с центром в центре круга H.

(10) Докажите неравенство треугольника в модели Пуанкаре в верхней полуплоскости.

(11) Докажите, что в одной точке пересекаются a) биссектрисы треугольника; b) медианы треугольника; c) высоты треугольника.

(12) (Гиперболическая теорема Менелая) Прямая l пересекает стороны BC, CA и AB треугольника ABC в точках A_1, B_1 и C_1. Докажите, что

$$\frac{\operatorname{sh} AC_1}{\operatorname{sh} C_1B} \cdot \frac{\operatorname{sh} BA_1}{\operatorname{sh} A_1C} \cdot \frac{\operatorname{sh} CB_1}{\operatorname{sh} B_1A} = 1.$$

(13) (Гиперболическая теорема Чевы) На сторонах BC, CA и AB треугольника ABC взяты точки A_1, B_1 и C_1. Докажите, что отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих эквивалентных условий:

$$a)\ \frac{\sin ACC_1}{\sin C_1CB} \cdot \frac{\sin BAA_1}{\sin A_1AC} \cdot \frac{\sin CBB_1}{\sin B_1BA} = 1;$$

$$b)\ \frac{\operatorname{sh} AC_1}{\operatorname{sh} C_1B} \cdot \frac{\operatorname{sh} BA_1}{\operatorname{sh} A_1C} \cdot \frac{\operatorname{sh} CB_1}{\operatorname{sh} B_1A} = 1.$$