НЕЗАВИСИМЫЙ МОСКОВСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

1 ноября 2006 г. 1-ый курс

ГЕОМЕТРИЯ
Листок № 8

(1) На прямой заданы попарно различные точки A, B, C, D и E. Докажите, что
$$[A, B, C, D] \cdot [A, B, D, E] \cdot [A, B, E, C] = 1.$$

(2) Сколько различных значений принимает двойное отношение четырех точек при перестановках этих точек?

(3) Четыре плоскости в $\mathbb{R}^3$ проходят через одну прямую. Докажите, что двойное отношение точек, в которых прямая l пересекает эти плоскости, не зависит от выбора прямой l.

(4) Сформулируйте и докажите теорему, двойственную теореме Паппа. Сделайте аккуратный чертеж.

(5) Сформулируйте и докажите теорему, двойственную теореме Дезарга. Сделайте аккуратный чертеж.

(6) * При соответствии двойственности точка на конике в $\mathbb{R}P^2$ переходит в прямую, касающуюся двойственной коники.

(7) Пользуясь задачей (6), сформулируйте и докажите теорему, двойственную теореме Паскаля (она называется теоремой Брианшона) и сделайте соответствующий аккуратный чертеж.

(8) В $\mathbb{R}^3$ заданы три попарно скрещивающиеся прямые l, l_1 и l_2. Сопоставим точке $A_1 \in l_1$ точку A_2, в которой прямая l_2 пересекает плоскость, содержащую точку A_1 и прямую l. Докажите, что отображение $A_1 \mapsto A_2$ прямой l_1 в прямую l_2 проективно.

(9) На плоскости даны прямые $l_1, \ldots, l_{n-1}$ и l. На прямой l взяты точки $O_1, \ldots, O_n$. Продолжения сторон n-угольника $A_1 \ldots A_n$ проходят через точки $O_1, \ldots, O_n$, а вершины $A_1, \ldots, A_{n-1}$ движутся по прямым $l_1, \ldots, l_{n-1}$. Докажите, что вершина A_n движется при этом по некоторой прямой.