НЕЗАВИСИМЫЙ МОСКОВСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ГЕОМЕТРИЯ

1 курс

ЭКЗАМЕН

17 декабря 2006 года

ИМЯ, ФАМИЛИЯ ОЦЕНКА:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ

Часть I. ВОПРОСЫ [Впишите ответы в отведенные места; никаких обоснований не требуется]

1. Укажите все возможные порядки элементов группы перестановок S_7:

2. Может ли (ДА, НЕТ) степень композиции $g \circ f$ отображений $f : S^1 \longrightarrow D^2$, $g : D^2 \longrightarrow S^1$ равняться

0 1 17

Ответьте на те же вопросы с заменой диска D^2 на тор $S^1 \times S^1$:

0 1 17

3. При каких n можно

(а) сферу заполнить неперекрывающимися правильными одинаковыми сферическими n-угольниками $n =$

(б) плоскость Лобачевского заполнить так же, но гиперболическими n-угольниками

$n =$

4. Разместите точки P, Q, R в дополнении иммерсированной кривой на картинке так, чтобы $\deg(P, f) = -3$, $\deg(Q, f) = 1$, $\deg(R, f) = -2$.

5. Может ли (ДА, НЕТ)

тор $S^1 \times S^1$ накрыть $\mathbb{R}P^2$

цилиндр $S^1 \times [0, 1]$ накрыть тор

$\mathbb{R}P^2$ накрыть тор

лист Мебиуса накрыть цилиндр

бутылка Клейна накрыть тор

Часть II. ЗАДАЧИ [Решения должны быть обоснованы]

6. Докажите, что у любого сферического треугольника сущест-вуют описанная и вписанная окружности, предварительно определив эти два понятия.

7. (Теорема о полном четырехстороннике) Пусть AB, BC, CD и AE — четыре прямые общего положения на плоскости, причем $D \in AB, E \in BC$, а $G = AE \cap CD$. Фигура $ABCDE$ называется *полным четырех-сторонником*, а прямые AC, BG и DE — его диагоналями. Пусть H и F — точки пересечения диагонали AC с диагоналями BG и DE соответственно. Докажите, что

$$[A, C, H, F] = -1,$$

т.е. *точки пересечения одной диагонали с двумя другими делят отрезок между вершинами четырехсторонника гармонически.*

8. Найдите минимальную (по числу образующих) систему обра-зующих группы движений куба, и задайте эту группу этими образу-ющими и соотношениями.

9. Плоскость Лобачевского заполнена одинаковыми правильными гиперболическими семиугольниками. Какие значения может принять внутренний угол при вершине семиугольника? Какое минимальное значение может принять расстояние от центра до вершины семиугольника?

10*. Из двух (может быть разных) замкнутых поверхностей в $\mathbb{R}^3$ ("сфер с ручками") вырезали некоторое число открытых дисков и получили негомеоморфные поверхности M и N. Может ли ока-заться, что $M \times [0, 1]$ гомеоморфно $N \times [0, 1]$?