Домашний экзамен

Для сдачи экзамена нужно решить приведённые задачи (не обязательно все) и побеседовать с одним из преподавателей по материалам курса. Это можно будет проделать в один из двух дней: **13 марта** в 14:00, ауд. 407, или **14 марта** в 19:10, ауд. 310. Решения задач следует принести в письменном виде; они должны быть записаны так, чтобы их можно было бы понять без дополнительных устных комментариев.

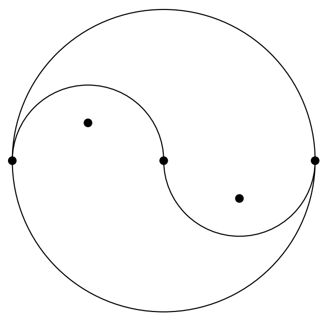
Вопросы по условиям можно задавать Евгению Смирнову по e-mail: `smirnoff@mccme.ru`.

Задача 1. Сколькими треугольниками с углами $(\pi/2, \pi/3, \pi/5)$ можно замостить сферу?

Задача 2. При каких n существует n-листное накрытие ленты Мёбиуса цилиндром $S^1 \times [0,1]$?

Задача 3. Пусть в гиперболическом треугольнике стороны a и b лежат против углов α и β соответственно. Докажите, что если $\alpha > \beta$, то $a > b$.

Задача 4. Нарисуйте фигуру, проективно двойственную к изображённой на рисунке. Проведите пять прямых, соответствующих отмеченным точкам. Фигура состоит из одной окружности и двух полуокружностей вдвое меньшего радиуса; отмечены три точки касания и две точки вне линий.



Задача 5. **а)** Впишите в додекаэдр пять кубов так, чтобы вершины каждого куба лежали бы в вершинах додекаэдра, а рёбра куба являлись бы диагоналями граней додекаэдра.

б) Покажите, что всякая изометрия додекаэдра индуцирует перестановку этих пяти кубов.

в) В предыдущем пункте описан гомоморфизм групп $\mathrm{Sym}(Dod) \to \mathbb{S}_5$, где $\mathbb{S}_5$ — группа перестановок множества из 5 элементов. Докажите, что он является изоморфизмом.

Задача 6. **а)** Точка $x_* \in \mathbb{R}$ называется *средним гармоническим* точек $x_1, \ldots, x_n$ относительно начала отсчёта a, если $\frac{n}{x_*-a} = \frac{1}{x_1-a} + \cdots + \frac{1}{x_n-a}$. Докажите, что это условие равносильно условию

$$\langle x_1, x_*, t, a\rangle + \cdots + \langle x_n, x_*, t, a\rangle = n$$

при любом $t \in \mathbb{R}$. (Угловыми скобками обозначено двойное отношение).

б*) Пусть кривая задана на плоскости уравнением $P(x,y) = 0$, где $P(x,y)$ — многочлен степени n. Прямая, вращающаяся относительно некоторой точки вне этой кривой, пересекает кривую в n точках $x_1, \ldots, x_n$. Докажите, что при этом среднее гармоническое точек $x_1, \ldots, x_n$ движется по некоторой прямой.