Гиперболичность по Кобаяши: некоторые алгебро-геометрические аспекты

Екатерина Америк

Это - записки лекций, прочитанных мною в НМУ осенью 2006 года. Понятие гиперболичности по Кобаяши - вариант понятия "отрицательной кривизны", естественно возникающий в комплексном анализе. Известно, что для компактных многообразий гиперболичность по Кобаяши эквивалентна отсутствию целых кривых (т.е. голоморфных образов $\mathbb{C}$; доказательство будет изложено в части 4). Мы увидим, как доказывать гиперболичность в некоторых простых и не очень простых случаях.

Вначале мы изучим чисто алгебраическую ситуацию: как доказать отсутствие на проективном многообразии рациональных и эллиптических кривых, или, скажем, то, что такие кривые содержатся в собственном подмногообразии? Мы поступим так в том числе и потому, что некоторые основные идеи, использующиеся при изучении гиперболичности - это трансцедентные аналоги соответствующих алгебраических методов.

Эти записки довольно сильно пересекаются с текстом [Deb]; надеюсь, они все-таки столь же сильно от него отличаются. Среди других источников упомянем прежде всего [D] и [L].

1. Подмногообразия общих гиперповерхностей в проективном пространстве

Гиперповерхности степени d в $\mathbb{P}^n$ параметризуются проективным пространством $\mathbb{P}^{N_d} = \mathbb{P}(H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)))$ (иногда нам будет удобнее параметризовать не сами гиперповерхности, а задающие их многочлены, и тогда пространством параметров будет $S^d = H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d))$). Под "общей гиперповерхностью" мы будем понимать такую гиперповерхность, что соответствующая ей точка $\mathbb{P}^{N_d}$ лежит в дополнении к счетному объединению некоторых (очевидных из ситуации) собственных подмногообразий. Таким образом, выражение "для общей гиперповерхности верно A" означает, что те гиперповерхности, для которых A может оказаться неверным, параметризуются счетным объединением собственных замкнутых подмножеств в $\mathbb{P}^{N_d}$.

Первый результат об отсутствии рациональных (и эллиптических) кривых на общей гиперповерхности принадлежит Клеменсу (1986), [Cl]:

Теорема 1.1 *На общей гиперповерхности X_d степени d в $\mathbb{P}^n$, $n \geq 3$, нет рациональных кривых, если $d \geq 2n-1$.*

Тогда же Клеменс предложил такую гипотезу:

При $n \geq 4$ это верно и если $d \geq 2n-2$.

(Эта гипотеза была впоследствии доказана Клэр Вуазен, к чему мы ещё вернемся).

Заметим, что при $d = 2n-3$ рациональные кривые на X_d, конечно, есть - например, прямые. В самом деле, рассмотрим многообразие инцидентности $F \subset Grass(1,n) \times \mathbb{P}^{N_d}$: $F = \{(l, X) | l \subset X\}$. Слой F_l над $l \in Grass(1,n)$ имеет коразмерность $h^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d)) = d+1$ из точной последовательности

$$0 \to \mathcal{I}_l(d) \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d) \to \mathcal{O}_l(d) \to 0;$$

так что из соображений размерности получаем, что общая гиперповерхность $X_d \subset \mathbb{P}^n$ содержит прямые тогда и только тогда, когда $d+1 \leq dim(Grass(1,n)) = 2n-2$.

Естественно предположить, что при $d = 2n-3$ рациональных кривых на общей X_d имеется лишь счетное число, т.е., имеется лишь конечное число рациональных кривых заданной степени; но это трудная задача - знаменитая гипотеза Клеменса. Видимо, из-за нее теорему Клеменса и формулируют как утверждение об отсутствии рациональных кривых; на самом же деле Клеменс доказал более общее утверждение:

Теорема 1.1A *Для кривой C на общей X_d имеем*

$$H^0(\tilde{C}, K_{\tilde{C}} \otimes \sigma^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(2n-d-1)) \neq 0,$$

где $\sigma : \tilde{C} \to C$ - нормализация.

Почему в такой формулировке результат Клеменса интереснее? Например, отсюда видно, что при $d \geq 2n$ на общей X_d нет и эллиптических кривых; и вообще, $deg(K_{\tilde{C}}) \geq (2n-d-1)deg(C)$. То есть, при $d \geq 2n$, для любой кривой $C \in X_d$

$$2g(\tilde{C}) - 2 \geq \epsilon deg(C),$$

где ϵ - некоторая положительная константа, не зависящая от C. Это свойство X_d называется *алгебраической гиперболичностью.* Мы увидим, что алгебраическая гиперболичность - следствие гиперболичности по Кобаяши.

Гипотеза Кобаяши утверждает, что общая $X_d \subset \mathbb{P}^n$ гиперболична при $d \geq 2n-1$. Несмотря на то, что результат Клеменса о рациональных кривых был улучшен Эйном [E], Су (Xu) [X] и Вуазен [V], алгебраическая гиперболичность общей гиперповерхности степени $2n-1$, кажется, пока не доказана даже для $n = 3$.

Л. Эйн [E] обобщил теорему Клеменса следующим образом:

Теорема 1.2 *Пусть X - общее полное пересечение типа $(d_1, \dots, d_k)$ в $\mathbb{P}^n$, $d = \sum d_i$, а $Z \subset X$ - подмногообразие. Пусть m_0 - наименьшее число, удовлетворяющее $H^0(\tilde{Z}, K_{\tilde{Z}} \otimes \sigma^*\mathcal{O}(m_0)) \neq 0$ (здесь $\sigma : \tilde{Z} \to Z$ - разрешение особенностей Z). Тогда $m_0 \leq 2n - k - d + 1 - dim(Z)$.*

(Таким образом, в случае гиперповерхности имеем $m_0 \leq 2n - d - dim(Z)$.)

Для дивизоров имеется также некоторое усиление "граничного случая" этого результата, принадлежащее Су [X]:

В условиях Теоремы 1.2, если $d = n+2$, а Z - дивизор на X, то $p_g(\tilde{Z}) \geq n-1$.

В частности, на общей квинтике в $\mathbb{P}^3$ нет эллиптических кривых.

Общий принцип доказательства похожих утверждений был предложен Вуазен [V]. Для простоты обозначений мы будем рассматривать только случай, когда X - гиперповерхность (хотя аналогичное доказательство теоремы 1.1A проходит и для полных пересечений).

Прежде, чем обратиться к доказательствам, обсудим, что означают слова "подмногообразие общей гиперповерхности": грубо говоря, "общая гиперповерхность X содержит Z" значит, что Z деформируется вместе с X. Точнее - всевозможные подмногообразия Z в $\mathbb{P}^n$ параметризуются схемой Гильберта, которая состоит из счетного числа неприводимых компонент. Для фиксированного Z_0 рассмотрим соответствующую компоненту $Hilb(Z_0)$ и подмногообразие $I \subset Hilb(Z_0) \times \mathbb{P}^{N_d}$: $I = \{(t, u) | Z_t \subset X_u\}$ (здесь мы предполагаем для простоты, что Z_0 соответствует достаточно общей точке $Hilb(Z_0)$). Z_0 "лежит на общей гиперповерхности", если и только если I доминирует $\mathbb{P}^{N_d}$. (Именно так и возникает дополнение к счетному числу собственных замкнутых подмножеств в определении "общности": мы должны выкинуть образы всевозможных I, не доминирующих $\mathbb{P}^{N_d}$.)

Обозначим $\mathcal{X} \subset \mathbb{P}^{N_d} \times \mathbb{P}^n$ универсальную гиперповерхность степени d (как подмногообразие $\mathbb{P}^{N_d} \times \mathbb{P}^n$, наша $\mathcal{X}$, естественно, имеет бистепень $(1, d)$) . Если Z лежит на общей гиперповерхности, то, выбирая мультисечение относительной схемы Гильберта над открытым подмножеством $\mathbb{P}^{N_d}$ и отбрасывая его ветвление, получим этальный (не сюръективный) морфизм $\tau : U \to \mathbb{P}^{N_d}$, такой, что $\mathcal{X}_U := \mathcal{X} \times_{\mathbb{P}^{N_d}} U$ содержит "универсальное подмногообразие" $\mathcal{Z}_U$ (слой $\mathcal{Z}_U$ над точкой $t \in \mathbb{P}^{N_d}$ - это Z_t, деформация Z, содержащаяся в гиперповерхности X_t). Для простоты обозначений мы не будем различать $\mathcal{X}$ и $\mathcal{X}_U$ (это действительно несущественно для наших приложений); иными словами, мы будем вести себя так, как если бы наше "универсальное подмногообразие" было определено уже над открытым подмножеством в $\mathbb{P}^{N_d}$.

Покажем, следуя Вуазен, что теорема 1.1A следует из такого утверждения:

Предложение 1.3 *Рассмотрим универсальную гиперповерхность*

$$\mathcal{X} \subset H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)) \times \mathbb{P}^n,$$

где $d \geq 2$, $n \geq 3$. Предположим, кроме того, что $H^0(X_t, T_{X_t}(1)) = 0$. Тогда для гладкой X_t расслоение $T\mathcal{X}(1)|_{X_t}$ порождается глобальными сечениями.

Здесь и далее $T\mathcal{X}(1)$ - это $T\mathcal{X}\otimes p^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$, где $p:\mathcal{X}\to\mathbb{P}^n$ - проекция.

Заметим, что последнее условие $H^0(X_t,T_{X_t}(1))=0$ заведомо выполнено в интересующем нас случае, когда X_t общего типа (т.е. $d>n+1$). Это следует из того, что $H^0(X_t,T_{X_t}\otimes K_{X_t})=H^0(X_t,\Omega^{n-2}_{X_t})=0$ по теореме Лефшеца о гиперплоском сечении.

Вывод 1.2 из 1.3:

Пусть $\mathcal{Z}\subset\mathcal{X}$ - универсальное подмногообразие, а $\sigma:\tilde{\mathcal{Z}}\to\mathcal{Z}$ - какое-нибудь разрешение особенностей. Предположим, что для некоторого числа a расслоение $\Omega^{dim(\mathcal{Z})}_{\mathcal{X}}|_{X_t}(a)$ порождено глобальными сечениями. Поскольку отображение ограничения

$$\Omega^{dim(\mathcal{Z})}_{\mathcal{X}}|_{X_t}(a)\to\Omega^{dim(\mathcal{Z})}_{\tilde{\mathcal{Z}}}|_{\tilde{Z}_t}(a)\cong K_{\tilde{Z}_t}(a)$$

сюръективно в общей точке, то $K_{\tilde{Z}_t}(a)$ должно иметь сечения.

Пусть $l=codim(Z,X)$; из предложения 1.3, $\Lambda^lT\mathcal{X}|_{X_t}(l)$ глобально порождено. Поскольку $K_{\mathcal{X}}|_{X_t}=K_{X_t}=\mathcal{O}_{X_t}(d-n-1)$, имеем

$$\Lambda^lT\mathcal{X}|_{X_t}(l)\cong\Lambda^{dim(\mathcal{Z})}\Omega_{\mathcal{X}}|_{X_t}(l-d+n+1),$$

то есть, в качестве a можно взять $l-d+n+1=2n-d-dim(Z)$, что и требовалось доказать.

Предложение 1.3 доказывается достаточно элементарно; доказательство состоит в подсчете разности размерностей $H^0(T\mathcal{X}(1)|_{X_t})$ и $H^0(T\mathcal{X}(1)|_{X_t}\otimes I_x)$, где x - точка X_t, а I_x - ее пучок идеалов (для глобальной порожденности необходимо и достаточно, чтобы эта разность была равна $rg(T\mathcal{X})=dim(S^d)+n-1$ для любой точки x). Вместо того, чтобы приводить здесь это доказательство (проходящее и для полных пересечений), мы изложим несколько более естественный аргумент , который хорошо работает для гиперповерхностей.

Рассмотрим т.н. "вертикальную компоненту" $T\mathcal{X}^{vert}$ расслоения $T\mathcal{X}$: это просто касательное расслоение вдоль слоев проекции $p:\mathcal{X}\to\mathbb{P}^n$, так что

$$0\to T\mathcal{X}^{vert}|_{X_t}\to T\mathcal{X}|_{X_t}\to T\mathbb{P}^n|_{X_t}\to 0.$$

Заметим, что можно предполагать, что наше "универсальное подмногообразие" $\mathcal{Z}\subset\mathcal{X}$ GL-инвариантно (по отношению к естественному действию GL на $\mathbb{P}^n\times S^d$: $g(x,F)=(gx,F\circ g^{-1})$). Из этого сразу следует, что $T\mathcal{Z}$ сюръективно отображается на $T\mathbb{P}^n$, то есть, "вертикальная коразмерность" $\mathcal{Z}$ в $\mathcal{X}$ - а именно, $codim(T\mathcal{Z}^{vert},T\mathcal{X}^{vert})$ - равна $codim(\mathcal{Z},\mathcal{X})$.

Отсюда легко выводится, что вместо предложения 1.3 нам достаточно такого:

Предложение 1.3A $T\mathcal{X}^{vert}(1)|_{X_t}$ *порождается глобальными сечениями.*

Действительно, пусть $l=codim(\mathcal{Z},\mathcal{X})$; сечения $\Lambda^lT\mathcal{X}^{vert}(l)|_{X_t}$ можно вычислять на "вертикальных компонентах" касательных плоскостей к $\mathcal{Z}$ в точках Z_t, поскольку коразмерность этих компонент правильна. Из глобальной порожденности $\Lambda^lT\mathcal{X}^{vert}(l)|_{X_t}$ следует, что для гладкой точки $z\in Z_t$, найдется сечение $s \in H^0(\Lambda^l T\mathcal{X}^{vert}(l)|_{X_t})$, ненулевое на $T_z\mathcal{Z}^{vert}$. Применяя, как и выше, двойственность, а потом ограничение на $\mathcal{Z}$, получим ненулевое сечение должным образом подкрученного $K_{\tilde{Z}_t}$.

Доказательство 1.3A: Из $\mathcal{X} \subset \mathbb{P}^n \times S^d$ имеем

$$0 \to T\mathcal{X}|_{X_t} \to T\mathbb{P}^n|_{X_t} \oplus (S^d \otimes \mathcal{O}_{X_t}) \to \mathcal{O}_{X_t}(d) \to 0,$$

поскольку $\mathcal{O}_{X_t}(d)$ - это ограничение на X_t нормального расслоения $\mathcal{X}$ в $\mathbb{P}^n \times S^d$. Отсюда и из

$$0 \to T\mathcal{X}^{vert}|_{X_t} \to T\mathcal{X}|_{X_t} \to T\mathbb{P}^n|_{X_t} \to 0$$

имеем, что $T\mathcal{X}^{vert}|_{X_t} \cong M^d_{\mathbb{P}^n}|_{X_t}$, где $M^d_{\mathbb{P}^n}$ - ядро отображения вычисления глобальных сечений $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)$:

$$0 \to M^d_{\mathbb{P}^n} \to S^d \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d) \to 0.$$

Значит, достаточно доказать, что $M^d_{\mathbb{P}^n}(1)$ порождается глобальными сечениями.А это следует, например, из его 0-регулярности в смысле Кастельнуово-Мамфорда (которая, в свою очередь, очевидна из точной последовательности, определяющей $M^d_{\mathbb{P}^n}$). Напомним (см., например, [M]), что пучок F на $\mathbb{P}^n$ *m-регулярен по Кастельнуово-Мамфорду*, если для всех $i > 0$ выполнено условие $H^i(\mathbb{P}^n, F(m-i)) = 0$; индукцией по n доказывается, что если F m-регулярен, то $F(l)$ порождается глобальными сечениями при $l \geq m$. Итак, предложение 1.3A, а с ним и теорема Эйна, доказано.

Замечания (некоторые из них очень длинные!):

1) Оценка Эйна для m_0 не оптимальна; хотелось бы, конечно, улучшить ее на 1. В случае, когда $\mathcal{Z}$ - дивизор, это очень трудно, если и возможно: так, из улучшенного варианта, полагая $n = 4$ и $d = 5$, мы получили бы, что на общей квинтике в $\mathbb{P}^5$ не существует дивизора, покрытого рациональными кривыми - а это и есть гипотеза Клеменса о конечности числа рациональных кривых заданной степени на такой квинтике.

2) Клэр Вуазен попыталась "уменьшить m_0 на 1" в случае $codim(\mathcal{Z}) \geq 2$, рассматривая расслоение $\Lambda^2 T\mathcal{X}(1)|_{X_t}$. Это бы полностью удалось, если бы было верно, что $H^0(\Lambda^2 T\mathcal{X}(1)|_{X_t})$ не имеет базисных точек на множестве GL-инвариантных подпространств коразмерности 2 в $T\mathcal{X}|_{X_t}$ - на этот раз мы получили бы сечение подкрученного канонического класса из сечений

$$\Lambda^{codim(Z,X)} T\mathcal{X}(codim(Z,X) - 1)|_{X_t},$$

т.е. подкрутка оказалась бы на единицу меньше. К сожалению, утверждение неверно: в $\mathcal{X}$ есть довольно много (GL-инвариантных) подмногообразий $\mathcal{Z}$, таких, что ограничение сечений "должным образом" подкрученных дифференциальных форм с $\mathcal{X}$ на $\mathcal{Z}$ - нулевое.

Такие подмногообразия легко строятся для небольших d. Вот самый элементарный

Пример 1: пусть k - натуральное число, а $d = 2n - 2 - k$. Рассмотрим $P_t \subset X_t$ - подмногообразие, заметаемое прямыми. Подсчет размерностей (как после формулировки теоремы 1.1) показывает, что $dim(P_t) = k$. Рассмотрим универсальное $\mathcal{P} \subset \mathcal{X}$. Если бы $\Lambda^2 T\mathcal{X}(1)|_{X_t}$ порождалось глобальными сечениями, то же было бы верно и для

$$\Lambda^{n-1-k} T\mathcal{X}(n-2-k)|_{X_t} \cong \Lambda^{dim(\mathcal{P})} \Omega_{\mathcal{X}}(1)|_{X_t},$$

то есть, у расслоения $K_{\tilde{P}_t}(1)$ были бы сечения, а это невозможно, так как P_t заметается прямыми.

Вот "лучший" пример из [V] (лучший он потому, что эту конструкцию можно обобщить на произвольные d, см. [V]):

Пример 2: Рассмотрим $Q_t \subset X_t$ - подмножество точек x, таких, что для некоторой прямой l имеем $X_t \cap l = dx$. Это семейство рационально эквивалентных 0-циклов на X_t. Аналогичный подсчет размерностей показывает $dim(Q_t) = 2n - d - 1$. Пусть $\mathcal{Q} \subset \mathcal{X}$ универсальное подмногообразие и $d = 2n - 1 - k$. Тогда

$$\Lambda^{n-1-k} T\mathcal{X}(n-2-k) \cong \Lambda^{dim(\mathcal{P})} \Omega_{\mathcal{X}}.$$

Теперь сошлемся на одно полезное при работе с алгебраическими циклами утверждение (по-видимому, впервые появившееся в работах Блоха):

Предложение 1.4 *Пусть W - гладкое неприводимое семейство 0-циклов на $\mathcal{X}$, а $Y \subset X \times W$ - его график ("универсальный цикл"). Предположим, что все циклы из W рационально эквивалентны циклам с носителем на подмногообразии X_0 размерности m_0. Тогда цикл Y рационально эквивалентен сумме $Y' + Y''$, где Y' - $dim(W)$-цикл на $X_0 \times W$, а Y'' - $dim(W)$-цикл на $X \times W'$, где W' - собственное подмногообразие W.*

В частности, отображение

$$[Y]^* : H^0(X, \Omega_X^m) \to H^0(W, \Omega_W^m)$$

нулевое для $m > m_0$.

"Наше" m_0 равно размерности пространства параметров $dim(S^d)$, а W является разрешением особенностей $\mathcal{Q}$.

Вуазен доказала, что при $d = 2n - 2$ это - "единственная неприятность", и проверила, что геометрический род Q_t положителен. Таким образом, гипотеза Клеменса об отсутствии рациональных кривых на гиперповерхности степени $2n - 2$ в $\mathbb{P}^n$, $n \geq 4$, верна. К сожалению, для больших d базисное множество $H^0(\Lambda^2 T\mathcal{X}(1)|_{X_t})$ довольно велико; так что улучшить на 1 оценку в теореме 1.2 (при $n \geq 4$) вышеописанным способом не удается.

3) При $d = 2n$ имеем, что для любого Z на общей X, $H^0(\tilde{Z}, K_{\tilde{Z}} \otimes \sigma^* \mathcal{O}_Z(-1)) \neq 0$ (где $\sigma : \tilde{Z} \to Z$ - разрешение особенностей). Из этого сразу следует, что все подмногообразия X - общего типа. В самом деле, расслоение $L = \sigma^* \mathcal{O}_Z(1)$ *объемно* как бирациональный прообраз обильного, т.е. $h^0(\tilde{Z}, L^{\otimes m})$ растет как $m^{dim(\tilde{Z})}$; очевидно, что сумма эффективного и объемного дивизоров объемна, т.е. $K_{\tilde{Z}}$ объемен, что и означает, что Z общего типа. Одна из гипотез Ленга утверждает, что из этого должна следовать гиперболичность по Кобаяши.

2. Теорема Богомолова о конечности числа рациональных и эллиптических кривых на поверхности общего типа с $c_1^2 > c_2$

Цель этой лекции - доказать следующий факт:

Теорема 2.1 (Богомолов) *Пусть X поверхность общего типа, причем $c_1^2(X) > c_2(X)$. Тогда для любого g, семейство кривых геометрического рода g на X ограничено.*

Другими словами, такие кривые параметризуются конечным числом неприводимых алгебраических многообразий.

В частности, на X лишь конечное число рациональных или эллиптических кривых: действительно, поскольку X общего типа, она не может заметаться ни рациональными, ни эллиптическими кривыми, так что все такие кривые на X изолированы; значит, по теореме 2.1 их конечное число.

Условие, что X общего типа, существенно. Действительно, на $\mathbb{P}^2$ есть особые рациональные кривые произвольно большой степени (поскольку вообще любая кривая проектируется на $\mathbb{P}^2$ с некоторым числом двойных точек); Мори и Мукаи показали, что то же верно для достаточно общей K3-поверхности, например, общей квартики в $\mathbb{P}^3$.

Теорема 2.1 - это первая часть основного утверждения работы [B]. Вторая часть - это утверждение об ограниченности семейства кривых на *произвольной* поверхности общего типа, инварианты которых как вложенных кривых удовлетворяют некоторым неравенствам. Например, эта вторая часть утверждает, что число кривых с отрицательным квадратом на поверхности общего типа конечно.

Последнее тоже неверно для произвольной поверхности. Классический пример - это раздутие $\mathbb{P}^2$ в девяти точках, являющихся базисным множеством достаточно общего пучка кубик. Каждая исключительная прямая будет сечением получившегося расслоения на эллиптические кривые. Приняв одно такое сечение за "нулевое", получим бесконечное множество (-1)-кривых, послойно применяя групповую операцию к оставшимся восьми.

Здесь мы подробно изложим доказательство теоремы 2.1 (следуя, в основном, [MD]) и укажем, как доказывается утверждение о кривых с отрицательным квадратом.

Вот основная идея доказательства 2.1: неравенство $c_1^2(X) > c_2(X)$ означает, что тавтологическое расслоение $\mathcal{O}_{\mathbb{P}TX}(1)$ на проективизации касательного расслоения к X - объемно. $\mathbb{P}TX$ отображается в проективное пространство линейной системой сечений $\mathcal{O}_{\mathbb{P}TX}(m)$ для достаточно большого m, и затем отдельно изучается семейство кривых рода g, не лежащих в множестве неопределенности, и кривые, в нем лежащие.

Поскольку понятие объемности будет важно и далее, то прежде, чем начать доказывать теорему 2.1, мы сделаем небольшое отступление на эту тему. Оно совершенно элементарно; но, на мой взгляд, все это важно хорошо понимать.

Небольшое отступление об объемных дивизорах

Пусть X - неприводимое проективное многообразие размерности n, D - $\mathbb{Q}$-дивизор Картье на X, а L - соответствующее линейное расслоение $\mathcal{O}_X(D)$. Рассмотрим множество

$$N(X, D) = \{m \in \mathbb{N} | h^0(X, L^{\otimes m}) \neq 0\}.$$

Ясно, что все элементы этого множества - кратности некоторого числа $e(L)$, их наибольшего общего делителя; и, наоборот, все достаточно большие кратности $e(L)$ попадут в $N(X, D)$.

Определение: Дивизор D называется объемным, если для некоторого положительного C и всех $m >> 0$, $m \in N(X, D)$, верно, что $h^0(X, L^{\otimes m}) \geq Cm^n$.

Утверждение 2.2: *Следующие условия эквивалентны:*

1) D объемен;

2) при $m >> 0$, $m \in N(X, D)$, верно, что $mD \sim A + E$, где A обилен, а E эффективен; более того, A можно выбирать произвольно;

3) при $m >> 0$, $m \in N(X, D)$, рациональное отображение

$$\phi_{|mD|} : X \dashrightarrow \mathbb{P}(H^0(X, L^{\otimes m})^*)$$

бирационально на свой образ.

Доказательство: 1)⇒2): пусть A очень обилен на X, тогда имеем точную последовательность

$$0 \to \mathcal{O}(mD - A) \to \mathcal{O}(mD) \to \mathcal{O}(mD)|_A \to 0.$$

Размерность пространства $H^0(A, \mathcal{O}(mD)|_A)$ не может расти быстрее, чем $C'm^{n-1}$ для некоторого положительного C', так что при больших m из $N(X, D)$ дивизор $mD - A$ эффективен.

2)⇒3): то, что сечения $A+E$ разделяют общие точки и касательные векторы в них, непосредственно следует из того, что это делают сечения A.

3)⇒1): очевидно, поскольку mD - собственный прообраз расслоения гиперплоскости при отображении $\phi_{|mD|}$, и, значит, имеет сечений не меньше, чем расслоение гиперплоскости(в точках неопределенности $\phi_{|mD|}$ используем теорему Хартогса).

В частности, свойство быть объемным открыто, и конус классов объемных дивизоров в $H^{1,1}(X)$ - это внутренность конуса эффективных классов.

Доказательство теоремы Богомолова 2.1:

Рассмотрим $\mathbb{P}TX$ - проективизацию касательного расслоения к X, т.е. многообразие прямых (а не гиперплоскостей!) в TX. Пусть C - гладкая неприводимая проективная кривая, а $f : C \to X$ - непостоянное отображение. Тогда определен подъем f на $\mathbb{P}TX$:

$$\tilde{f} : C \to \mathbb{P}TX; \quad \tilde{f}(c) = (f(c), [f'(c)])$$

(конечно, это выражение имеет смысл только там, где $f'(c)$ не обращается в нуль, но любое рациональное отображение проективной кривой продолжается до регулярного).

По построению, касательное расслоение T_C отображается в обратный образ универсального подрасслоения на $\mathbb{P}TX$:

$$T_C \to \tilde{f}^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}TX}(-1). \quad (*)$$

Коядро этого отображения сосредоточено на множестве критических точек f.

Следующее предложение является ключевым в доказательстве:

Предложение 2.3: *В условиях теоремы 2.1, расслоение $\mathcal{O}_{\mathbb{P}TX}(1)$ объемно.*

Доказательство: По формуле Римана-Роха, для дивизора D на трехмерном многообразии M имеем

$$\chi(M, \mathcal{O}(mD)) = m^3D^3/6 + O(m^2).$$

Значит, достаточно показать, во-первых, что $\xi^3 > 0$, где ξ - класс $\mathcal{O}_{\mathbb{P}TX}(1)$, а во-вторых, что вторые когомологии $\mathcal{O}_{\mathbb{P}TX}(m)$ растут не быстрее, чем пространство глобальных сечений.

Первое утверждение - это следствие нашего неравенства на классы Чженя поверхности X. Действительно, если E - векторное расслоение ранга r на многообразии M, то на $Y = \mathbb{P}_M(E)$ имеем

$$\sum_{i=0}^{i=r} \xi^i p^* c_i(E) = 0,$$

где $\xi = [\mathcal{O}_{\mathbb{P}_{M(E)}}(1)]$, а p - проекция. Значит,

$$\xi(\xi^2 + p^*c_1(X)\xi + p^*c_2(X)) = \xi^3 - p^*c_1^2(X)\xi + p^*c_2(X)\xi = 0,$$

то есть, $\xi^3 = c_1^2 - c_2 > 0$, что и требовалось.

Для доказательства второго утверждения заметим, что $p_*\mathcal{O}_{\mathbb{P}TX}(m) = S^m\Omega^1_X$, а высших прямых образов нет; то есть,

$$h^2(\mathbb{P}TX, \mathcal{O}_{\mathbb{P}TX}(m)) = h^2(X, S^m\Omega^1_X) = h^0(X, S^mTX \otimes K_X);$$

поскольку $TX \cong \Omega^1_X \otimes K_X^{-1}$, то

$$h^0(X, S^mTX \otimes K_X) = h^0(S^m\Omega^1_X \otimes K_X^{\otimes 1-m}).$$

Поскольку $K_X^{\otimes m-1}$ имеет сечения при больших m, то это не превосходит

$$h^0(X, S^m\Omega^1_X) = h^0(\mathbb{P}TX, \mathcal{O}_{\mathbb{P}TX}(m)),$$

а значит, $h^0(\mathbb{P}TX, \mathcal{O}_{\mathbb{P}TX}(m))$ действительно растет как m^3, ч.т.д..

Замечание 2.4: Кроме неравенства на классы Чженя, мы использовали только то, что $K_X^{\otimes m}$ имеет сечения при больших m (а не то, что K_X объемно, т.е. X общего типа). Но из классификации поверхностей следует, что любая поверхность с $c_1^2 - c_2 > 0$ и эффективным $K_X^{\otimes m}$ - общего типа.

Продолжим доказательство теоремы 2.1. Итак, имеем бирациональное на свой образ отображение $G : \mathbb{P}TX \dashrightarrow \mathbb{P}^M$, заданное сечениями $\mathcal{O}_{\mathbb{P}TX}(m)$ при некотором достаточно большом m. Пусть $Z \subset \mathbb{P}TX$ - такое собственное замкнутое подмножество, что G - изоморфизм вне Z. Мы разберем отдельно два случая: сначала мы докажем, что неприводимые кривые рода g, подъем которых на $\mathbb{P}TX$ не лежит в Z, образуют ограниченное семейство, а потом - что то же верно и для кривых рода g с подъемом в Z. Точнее, последнее утверждение - очевидное следствие результата Жуанолу, который интересен сам по себе и который мы разберем в следующей части.

Итак, пусть C - гладкая кривая рода g, а $f : C \to X$ - такое отображение, что образ $\tilde{f} : C \to \mathbb{P}TX$ не лежит в Z (при этом, как и раньше, f предполагается бирациональным на свой образ) . Тогда $G\tilde{f}$ отображает C в $\mathbb{P}^M$, причем если образы C и C' в X различны, то же верно и для их образов в $\mathbb{P}^M$. Достаточно ограничить степень $G\tilde{f}(C)$ в $\mathbb{P}^M$ (это легко следует из того хорошо известного факта, что семейство кривых степени не выше данной в проективном пространстве ограничено).

Но мы уже видели, что T_C естественно отображается в $f^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}TX}(-1)$; значит, степень T_C не больше степени $f^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}TX}(-1)$. Соответственно,

$$deg(G\tilde{f}(C)) \leq deg(f^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}TX}(m)) \leq m \cdot deg(\Omega^1_C) = m(2g-2),$$

что и требовалось показать.

Замечание 2.5: Таким образом, подъем всех рациональных или эллиптических кривых с X на TX обязательно попадет в множество Z: в самом деле, для таких кривых $m(2g-2) \leq 0$.

Осталось разобрать случай кривых, лежащих в Z.

Z является объединением конечного числа неприводимых компонент Z_i. Те из них, образ которых при проекции на X - кривая C_i, мы можем не рассматривать: действительно, на X имеем лишь конечное число кривых, подъем которых попадает в эти Z_i, а именно, сами кривые C_i. Так что достаточно рассмотреть случай, когда Z - неприводимая поверхность, доминирующая X.

В этом случае пусть $\alpha : \tilde{Z} \to Z$ - разрешение особенностей. Тогда $\tilde{Z}$ снабжено естественным слоением. Его можно представлять себе, например, так: локально в окрестности достаточно общей точки $z \in Z$, Z есть сечение проекции p; оно индуцирует некоторое (тавтологическое) распределение прямых на X, которое (все ещё локально!) поднимается на Z. Формально мы можем определить слоение как обратимый подпучок $L \subset \Omega^1_{\tilde{Z}}$; поскольку на $\mathbb{P}TX$ имеем точную последовательность

$$0 \to M \to p^*\Omega^1_X \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}TX}(1) \to 0,$$

то в качестве L можно взять $\alpha^*M|_Z$: действительно, композиция $\alpha^*M|_Z \to \alpha^*p^*\Omega^1_X \to \Omega^1_{\tilde{Z}}$ ненулевая, поскольку по условию p изоморфно отображает Z на X в общей точке Z. Из обеих конструкций очевидно, что подъем $f(C)$ на $\mathbb{P}TX$ будет интегральной кривой нашего слоения, если, конечно, $f(C)$ попадет на Z.

Для того, чтобы закончить доказательство, достаточно сослаться на следующее утверждение:

Теорема Жуанолу: ([J]) *Пусть X - гладкое проективное многообразие, а $\mathcal{F}$ - слоение на X, такое, что коразмерность его листов равна 1 (таким образом, $\mathcal{F}$ задается некоторой мероморфной дифференциальной формой ω). Тогда либо число алгебраических интегральных гиперповерхностей $\mathcal{F}$ конечно, либо $\mathcal{F}$ имеет мероморфный первый интеграл (здесь первый интеграл - это рациональная функция f с $\omega \wedge df = 0$; таким образом, интегральные гиперповерхности являются компонентами слоев отображения $f : X \dashrightarrow \mathbb{P}^1$).*

Из теоремы Жуанолу, либо наших кривых лишь конечное число, либо они параметризуются некоторой алгебраической кривой; так что теорема 2.1 доказана.

Теорему Жуанолу мы разберем отдельно; а в заключение этой части расскажем, очень приблизительно, как Богомолов получил конечность числа кривых (данного геометрического рода) с отрицательным квадратом (другими словами, ограниченность их семейства - ведь такие кривые не деформируются!) на поверхности общего типа с произвольными классами Чженя. В этом случае $\mathcal{O}_{\mathbb{P}TX}(1)$ не обязательно объемно на $\mathbb{P}TX$; но, оказывается, можно подобрать конечное число линейных расслоений F_i на X, таких, что:

1) $\mathcal{O}_{\mathbb{P}TX}(m_i) \otimes p^*F_i$ объемны для некоторых m_i;

2) для C с отрицательным квадратом найдется i такое, что $F_iC \leq 0$,
а значит, степень $G_i(C)$ в одном из конечного числа бирациональных отображений G_i, соответствующих подкруткам на F_i, окажется ограниченной. Отсюда легко следует утверждение теоремы.

Для проверки объемности используется, с одной стороны, теорема Римана-Роха, а с другой - для того, чтобы контролировать H^2 - стабильность по Богомолову кокасательного расслоения на поверхности общего типа. В дальнейшем мы еще увидим примеры таких рассуждений.

3. Теорема Жуанолу

Итак, цель этой части - изложить доказательство следующей теоремы (мы будем работать только с поверхностями, поскольку в конце этой части мы попытаемся, следуя [Br], связать теорему Жуанолу с классической теоремой Кастельнуово - де Франкиса, но приводимое ниже доказательство Жуанолу проходит и для произвольной размерности):

Теорема 3.1: ([J]) *Пусть X - гладкая проективная поверхность, а $\mathcal{F}$ - слоение на X (заданное некоторой мероморфной дифференциальной 1-формой ω). Тогда либо число алгебраических интегральных кривых $\mathcal{F}$ конечно, либо $\mathcal{F}$ имеет мероморфный первый интеграл (здесь первый интеграл - это рациональная функция f с $\omega \wedge df = 0$; таким образом, интегральные кривые являются компонентами слоев отображения $f : X \dashrightarrow \mathbb{P}^1$).*

Напомним сначала некоторые основные определения и факты.

Алгебраическое слоение на поверхности X - это обратимый подпучок $\mathcal{F}$ в касательном расслоении TX. В случае произвольной размерности $\mathcal{F}$, конечно, может быть любого ранга и предполагается *инволютивным*, т.е. замкнутым относительно операции коммутирования векторных полей; нам этого предполагать не нужно, поскольку подпучок ранга 1 инволютивен автоматически.

Мы будем предполагать $\mathcal{F}$ *насыщенным*, т.е. таким, что фактор $TX/\mathcal{F}$ не имеет кручения. Это предположение на самом деле не вносит никаких существенных ограничений: действительно, любой подпучок L пучка A обладает насыщением - т.е. существует единственный насыщенный подпучок $L^s \subset A$, совпадающий с L в общей точке. Очевидно, это просто ядро сквозного отображения $A \to A/L \to (A/L)/(A/L)^{tors}$. Другими словами, с помощью насышения мы избавляемся от "ненастоящих особенностей" нашего слоения - особенностей в коразмерности 1.

Итак, имеем точную последовательность

$$0 \to \mathcal{F} \to TX \to N_{\mathcal{F}} \otimes \mathcal{I}_{sing(\mathcal{F})} \to 0.$$

Здесь $\mathcal{I}_{sing(\mathcal{F})}$ - пучок идеалов нульмерной подсхемы (особенностей $\mathcal{F}$), а $N_{\mathcal{F}}$ - линейное расслоение, которое мы будем называть *нормальным расслоением* слоения $\mathcal{F}$.

Двойственная точная последовательность - это

$$0 \to N^*_{\mathcal{F}} \to \Omega^1_X \to \mathcal{F}^* \otimes \mathcal{I}_{sing(\mathcal{F})} \to 0.$$

То есть, наше слоение можно задать мероморфной формой $\omega_{\mathcal{F}}$, сечением $\Omega^1_X \otimes N_{\mathcal{F}}$; а $N^*_{\mathcal{F}}$ - линейное расслоение, соответствующее ее дивизору.

Интегральная кривая $\mathcal{F}$ - это образ отображения $i : C \to X$ (где C - комплексная кривая) такого, что $i^*\omega_{\mathcal{F}} = 0$, или, что то же самое, $Im(TC \to i^*TX) \subset i^*\mathcal{F}$.

Важный момент в доказательстве теоремы Жуанолу - вырождение спектральной последовательности Ходжа - де Рама

$$E_1^{pq} = H^q(X, \Omega^p_X) \Rightarrow H^{p+q}(X, \mathbb{C})$$

в члене E_1, выполняющееся для компактных кэлеровых многообразий. Из него, в частности, следует замкнутость голоморфных форм. Замкнутость голоморфных 1-форм на поверхности, впрочем, доказывается совсем элементарно: в самом деле, если ω - такая форма, то легко проверить, что $d\omega \wedge \overline{d\omega}$ - точная форма:

$$d\omega \wedge \overline{d\omega} = d(d\omega \wedge \overline{\omega}).$$

Значит, $\int_X d\omega \wedge \overline{d\omega} = 0$ по формуле Стокса; то есть, $d\omega = 0$ - иначе $d\omega \wedge \overline{d\omega}$ была бы формой объема, с положительным интегралом.

Нам потребуется еще одно свойство дифференциальных форм на поверхности, следующее из вырождения спектральной последовательности Ходжа - де Рама (см. (2) ниже).

Доказательство теоремы 3.1: Введем следующие обозначения:

$Div(X)$ - группа дивизоров на X;

$Div^0(X)$ - подгруппа дивизоров с нулевым классом Чженя (в $H^2(X, \mathbb{R})$);

M - подгруппа $Div(X)$, порожденная алгебраическими интегральными кривыми;

$M^0 = M \cap Div^0(X)$.

Очевидно, достаточно показать, что в отсутствие первого интеграла пространство $M^0 \otimes \mathbb{C}$ будет конечномерным - из этого сразу следует конечномерность $M \otimes \mathbb{C}$: $dim(M \otimes \mathbb{C}) \leq dim(M^0 \otimes \mathbb{C}) + h^{1,1}(X)$. Мы построим линейное отображение $M^0 \otimes \mathbb{C}$ в конечномерное пространство, и докажем, что если первого интеграла нет, то ядро этого отображения конечномерно (и даже имеет размерность ≤ 1).

Шаг 1: Сначала определим отображение

$$\psi : Div^0(X) \otimes \mathbb{C} \to H^0(X, \Omega^1_X \otimes \mathcal{M}^*_X)/H^0(X, \Omega^1_X)$$

(здесь $\mathcal{M}^*_X$ - обратимые мероморфные функции, т.е. наши дивизоры отображаются в мероморфные формы по модулю голоморфных) следующим образом: пусть $D \in Div^0(X)$ локально задается функциями f_α на элементах покрытия U_α. Тогда $g_{\alpha\beta} = f_\alpha / f_\beta$ - это 1-коцикл на X со значениями в $\mathcal{O}^*_X$ (он соответствует ассоциированному с D линейному расслоению). Напомним, что (первый) класс Чженя - это отображение

$$c_1 = dlog : H^1(X, \mathcal{O}^*_X) \to H^1(X, \Omega^1_X).$$

Поскольку $c_1([D]) = 0$, $dlog(g_{\alpha\beta})$ - кограница, т.е.

$$dlog(f_\alpha) - dlog(f_\beta) = \omega_\alpha - \omega_\beta,$$

где $\omega_\alpha \in \Omega^1(U_\alpha)$, $\omega_\beta \in \Omega^1(U_\beta)$. Значит,

(1) $dlog(f_\alpha) - \omega_\alpha$ склеиваются в глобальную мероморфную форму $\psi(D)$, определенную с точностью до прибавления глобальной голоморфной 1-формы (поскольку ω_α тоже определены с точностью до такой формы).

К тому же

(2) Поскольку на $U_\alpha \cap U_\beta$ выполнено $d\omega_\alpha = d\omega_\beta$,определена глобальная голоморфная 2-форма $d\omega$. На самом деле эта глобальная форма даже равна нулю! Это следует из вырождения спектральной последовательности Ходжа - де Рама. Действительно, поскольку $c_1([D]) = 0$, элемент, соответствующий $[D]$ в $H^1(X, \mathcal{O}_X^*)$, является образом элемента из $H^1(X, \mathcal{O}_X)$ (рассмотреть экспоненциальную точную последовательность). А значит, процесс получения $d\omega$ из $g_{\alpha\beta}$ можно интерпретировать как построение дифференциала d_2 из спектральной последовательности:

$$Ker(H^1(X, \mathcal{O}_X) \xrightarrow{d} H^1(X, \Omega_X^1)) = E_2^{0,1} \xrightarrow{d_2} E_2^{2,0} \subset H^0(X, \Omega_X^2).$$

Как мы знаем, этот дифференциал нулевой.

(Это рассуждение явно выглядит излишне заумным, но я не смогла придумать проще! Если это сделает кто-то из читателей - сообщите.)

Так что замкнута и наша мероморфная форма $\psi(D)$ (вернее, любой представитель класса $\psi(D)$ по модулю голоморфных форм). Это потребуется нам немного позже.

Шаг 2: Проверим, что отображение ψ инъективно. Пусть неприводимые эффективные C_i таковы, что $\psi(\sum_{i=1}^k a_i C_i) = 0$, $a_1 \neq 0$. Если C_i локально задаются $f_{i,\alpha}$ на U_α, то форма $\sum_i a_i \frac{df_{i,\alpha}}{f_{i,\alpha}}$ должна быть голоморфна на U_α. Но она не может быть голоморфной, если U_α - малая окрестность неособой точки $x \in C_1$, такой, что другие C_i не содержат x: иначе получилось бы, что $\frac{df_{1,\alpha}}{f_{1,\alpha}}$ голоморфна.

Шаг 3: Теперь определим отображение

$$\psi_{\mathcal{F}} : M^0 \otimes \mathbb{C} \to H^0(X, \omega_X \otimes N_{\mathcal{F}})/\omega_{\mathcal{F}} \wedge H^0(X, \Omega_X^1)$$

(где ω_X - канонический класс X) по формуле

$$\psi_{\mathcal{F}}(D) = \omega_{\mathcal{F}} \wedge \psi(D):$$

локально с точностью до внешнего произведения $\omega_{\mathcal{F}}$ и голоморфной формы,

$$\omega_{\mathcal{F}} \wedge \psi(D)|_{U_\alpha} = \omega_{\mathcal{F}} \wedge (dlog(f_\alpha) - \omega_\alpha) = -\omega_{\mathcal{F}} \wedge \omega_\alpha,$$

поскольку f_α задает интегральную кривую нашего слоения $\mathcal{F}$; причем это действительно сечение $\omega_X \otimes N_{\mathcal{F}}$, так как $\omega_{\mathcal{F}}$ - сечение $\Omega_X^1 \otimes N_{\mathcal{F}}$.

Докажем, наконец, что если у $\mathcal{F}$ нет мероморфного первого интеграла, то $dim\ Ker(\psi_{\mathcal{F}}) \leq 1$. Пусть $a \in Ker(\psi_{\mathcal{F}})$, а v_a - представитель $\psi(a)$ в пространстве мероморфных 1-форм. Тогда $dv_a = 0$ и $\omega_{\mathcal{F}} \wedge v_a = \omega_{\mathcal{F}} \wedge w_a$, где w_a голоморфна; то есть,

$$v_a - w_a = \phi_a \omega_{\mathcal{F}},$$

где ϕ_a - мероморфная функция. При этом

$$0 = d(\phi_a \omega_{\mathcal{F}}) = d\phi_a \wedge \omega_{\mathcal{F}} + \phi_a d\omega_{\mathcal{F}} \qquad (1).$$

Если b - другой элемент $Ker(\psi_{\mathcal{F}})$, то, повторив все вышесказанное для b и v_b - представителя $\psi(b)$, получим мероморфную функцию ϕ_b, такую, что

$$0 = d(\phi_b \omega_{\mathcal{F}}) = d\phi_b \wedge \omega_{\mathcal{F}} + \phi_b d\omega_{\mathcal{F}} \qquad (2).$$

Значит

$$d\frac{\phi_a}{\phi_b} \wedge \omega_{\mathcal{F}} = \frac{\phi_a d\phi_b - \phi_b d\phi_a}{\phi_b^2} \wedge \omega_{\mathcal{F}} = 0,$$

так как числитель этого выражения есть $\phi_a \cdot (2) - \phi_b \cdot (1)$. Поэтому $\frac{\phi_a}{\phi_b}$ - константа λ: иначе это был бы первый интеграл для $\mathcal{F}$. Отсюда легко получаем, что $\psi(a) = \lambda\psi(b)$, т.е. $a = \lambda b$, т.к. ψ инъективно.

Теорема доказана.

В работе [Br] предлагается другая схема доказательства теоремы Жуанолу: оказывается, ее можно рассматривать как аналог классической леммы Кастель- нуово-де Франкиса для логарифмических дифференциальных форм. Напомним, что лемма Кастельнуово-де Франкиса состоит в следующем:

Лемма 3.2 *Пусть X- гладкая проективная поверхность и $L \subset \Omega_X^1$ - (насыщенный) подпучок ранга 1, такой, что $h^0(X, L) \geq 2$ (другими словами, на X имеются две глобально независимые голоморфные 1-формы ω_1 и ω_2, такие, что $\omega_1 \wedge \omega_2 = 0$). Тогда существует голоморфное отображение X на кривую C, такое, что ω_i - прообразы некоторых голоморфных 1-форм на C.*

Идея доказательства: Рассматривается мероморфная функция f, такая, что $\omega_1 = f\omega_2$; она определяет мероморфное отображение $f : X \dashrightarrow \mathbb{P}^1$. Затем проверяется, что разложение Штейна f дает искомое голоморфное отображение $g : X \to C$. Действительно, заменив отображение f на разрешение его неопределенности, получим, что над открытым множеством ω_i являются прообразами 1-форм θ_i на C: это видно из равенств

$$0 = d\omega_1 = d(f\omega_2) = df \wedge \omega_2.$$

Дальше легко проверяется, что θ_i продолжаются до глобальных s_i, и $\omega_i = g^* s_i$; автоматически имеем, что род C не меньше двойки, а из этого уже следует, что множество неопределенности f с самого начала было пусто.

Таким образом, ключевое место в доказательстве - это замкнутость голоморфных 1-форм (как мы видели, в случае поверхностей доказать ее очень просто).

Вернемся теперь к теореме Жуанолу. Пусть $C_1, \dots C_N$ - интегральные кривые для $\mathcal{F}$ и $C = \cup C_i$. Рассмотрим $\Omega^1_X(log\ C)$, пучок дифференциальных форм с логарифмическими особенностями вдоль C. Заметим, что наша ситуация несколько отличается от той, что изучается "обычно", поскольку мы не предполагаем, что C - дивизор с нормальными пересечениями. Но многие стандартные утверждения о логарифмических формах верны и в нашей более общей ситуации. В частности, имеем точную последовательность

$$0 \to \Omega^1_X \to \Omega^1_X(log\ C) \stackrel{Res}{\to} \mathcal{O}_{\tilde{C}} \to 0,$$

где $\tilde{C}$ - нормализация C. Поэтому

$$h^0(X, \Omega^1_X(log\ C)) \geq N + h^{1,0}(X) - h^{1,1}(X).$$

Предположим, что N можно выбрать очень большим - например, бо́льшим, чем $h^{1,1}(X) - h^{1,0}(X) + h^0(X, \mathcal{F}^*) + 2$; так, конечно, будет, если число неприводимых алгебраических интегральных кривых $\mathcal{F}$ бесконечно. Имеется естественное отображение "свертки" (или "вычисления вдоль слоев")

$$\Omega^1_X(log\ C) \to \mathcal{F}^*;$$

таким образом, неравенство

$$h^0(\Omega^1_X(log\ C)) \geq h^0(X, \mathcal{F}^*) + 2$$

означает, что существуют две глобально независимые логарифмические формы, обращающиеся в нуль на листах $\mathcal{F}$.

Теперь, как и в лемме Кастельнуово-де Франкиса, из замкнутости логарифмических форм следует, что их отношение является первым интегралом $\mathcal{F}$.

Оказывается, наконец, что замкнутость логарифмических форм на поверхности (без условия нормальности пересечений на границе) нетрудно доказать ([Br] ссылается на [N]).

4. Гиперболичность по Кобаяши: основные понятия

Вначале приведем два определения гиперболичности по Кобаяши. Они эквивалентны, но доказывать это мы здесь не будем, сославшись, например, на [L] (доказательство, как и определение гиперболичности через финслеровы метрики, впервые появилось в [R1]).

Пусть E - комплексное векторное расслоение на X. *Финслеровой метрикой* или *функцией длины* на E называется непрерывное отображение $N : E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, такое, что $N(\lambda v) = |\lambda| N(v), \lambda \in \mathbb{C}$, и N обращается в нуль только на нулевом сечении E. *Финслерова псевдометрика*, она же *функция псевдодлины* - это полунепрерывное сверху отображение $N : E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, такое, что $N(\lambda v) = |\lambda| N(v), \lambda \in \mathbb{C}$.

Обозначим Δ единичный диск в $\mathbb{C}$. На касательном расслоении ко гладкому комплексному многообразию X введем такую финслерову псевдометрику: для $v \in T_{X,x}$ положим

$$k_X(v) = inf\{\lambda > 0 | \exists f : \Delta \to X, f(0) = x, f'(0) = x/\lambda\}.$$

(ее полунепрерывность сверху неочевидна! Но мы здесь, опять же, не будем этого доказывать, снова сославшись на [L] или же на [R1] и [R2] - в последней работе доказывается ключевая лемма о продолжении голоморфных отображений).

Если $X = \Delta$, то это - метрика Пуанкаре

$$|v|_{hyp} = \frac{|v|_{eucl}}{1 - |x|^2}, \ v \in T_{x,\Delta},$$

(или же $h_P(z) = \frac{dz \otimes d\bar{z}}{(1-|z|^2)^2}$.) Это видно из классической леммы Шварца:

Лемма 4.1 *Пусть $f : \Delta \to \Delta$ - голоморфное отображение диска в себя. Тогда*

$$\frac{|f'(z)|}{1 - |f(z)|^2} \leq \frac{1}{1 - |z|^2},$$

причем равенство в одной точке означает, что f автоморфизм и равенство выполнено повсюду.

Для доказательства сначала рассматривается случай $z = 0, f(0) = 0$: здесь можно, например, разложить f в стпенной ряд и использовать равенство Парсеваля. Дальше используются автоморфизмы диска $g_z(u) = \frac{u+z}{1+\bar{z}u}$: отображение f заменяется на $F = g_{-f(z)} \circ f \circ g_z$ $(g_{-f(z)} = g_z^{-1})$; $F(0) = 0$.

Другая формулировка леммы Шварца: голоморфные отображения "уменьшают" метрику Пуанкаре, т.е. $f^* h_P \leq h_P$; равенство в одной точке означает, что f изометрия.

Псевдорасстояние Кобаяши $d_{hyp}(x, y)$ получается интегрированием псевдометрики Кобаяши. *X гиперболично по Кобаяши*, если псевдорасстояние Кобаяши является настоящим расстоянием, т.е. $d_{hyp}(x, y) \neq 0$ при $x \neq y$.

Это определение принадлежит Ройдену [R1]. Несколько ранее Кобаяши предложил другое определение; оно годится не только для многообразий, но и для комплексных пространств.

Определим расстояние $d_{hyp} = d_\Delta$ на единичном диске как получающееся интегрированием метрики Пуанкаре. Для пары точек x, y на X рассмотрим соединяющую их цепочку дисков $f_i : \Delta \to X$, $1 \leq i \leq N$, $p_i, q_i \in \Delta$, $f_1(p_1) = x$,

$f_i(q_i) = f_{i+1}(p_{i+1})$, $f_N(q_N) = y$ (здесь N, конечно, ни в коем случае не фиксировано и вводится только для удобства записи). Теперь определим

$$d_{hyp}(x,y) = inf_{f_i,p_i,q_i} \sum_1^N d_\Delta(p_i,q_i).$$

X *гиперболично по Кобаяши*, если $d_{hyp}(x,y)$ - расстояние.

Замечание 4.2: Если существует непостоянное отображение $f : \mathbb{C} \to X$, то X не является гиперболичным по Кобаяши. Более того, d_{hyp} нулевое на образе $\mathbb{C}$. В самом деле, рассмотрим отображение

$$\Delta \stackrel{f_R}{\to} \mathbb{C} \to X, \ f_R(z) = Rz.$$

Тогда при R, стремящемся к бесконечности, и $p, q \in \mathbb{C}$, $d_\Delta(f_R^{-1}p, f_R^{-1}q)$ стремится к нулю, т.е. $d_{hyp}(f(p), f(q)) = 0$.

Теорема Броди утверждает, что для компактных X верно и обратное, т.е. если X не гиперболично, то на X есть целая кривая $f : \mathbb{C} \to X$. Основной ингредиент доказательства - это лемма Броди о репараметризации, которую мы сейчас докажем.

Выберем какую-нибудь эрмитову метрику h на X. Заметим, что если X не гиперболично, то можно построить $f : \Delta \to X$ с неограниченно большим $||f'(0)||_h$.

Лемма 4.3 (лемма Броди): *Пусть $f : \Delta \to X$ - голоморфное отображение. Для любого $r \in (0,1)$, существует $R \geq r||f'(0)||_h$ и биголоморфизм $\psi : D(0,R) \to D(0,r)$, такой, что:*
$||(f \circ \psi)'(0)||_h = 1$;
$||(f \circ \psi)'(t)||_h \leq \frac{1}{1-|t/R|^2}$.

(Другими словами, если определить метрику Пуанкаре h_P на диске $D(0,R)$ радиуса R так, что $|v|_{hyp} = \frac{|v|_{eucl}}{1-|z/R|^2}$, получится $(f \circ \psi)^* h \leq h_P$.)

Доказательство: Рассмотрим выражение $(1-|z|^2)||f'(rz)||_h$ (с точностью до r, это норма производной $z \mapsto f(rz)$, рассматриваемой как линейный оператор). Оно определено на $\overline{\Delta}$ и равно нулю на границе, так что достигает максимума в точке $z_0 \in \Delta$. Определим ψ как автоморфизм диска, с точностью до гомотетий, посылающий 0 в rz_0:

$$\psi(t) = rg_{z_0}(t/R), \ g_z(u) = \frac{z+u}{1+\bar{z}u}.$$

Тогда

$$||(f \circ \psi)'(0)||_h = |\psi'(0)| \cdot ||f'(rz_0)||_h = (1-|z_0|^2)\frac{r}{R}||f'(rz_0)||_h.$$

Значит, первое утверждение леммы выполнено для

$$R = (1 - |z_0|^2)r||f'(rz_0)||_h \geq r||f'(0)||_h$$

(в силу нашего выбора z_0). К тому же, с точностью до константы, $(1 - |t/R|^2)||(f \circ \psi)'(t)||_h$ - это норма производной $z \mapsto f(rz)$ в точке $g_{z_0}(t/R)$. Она максимальна в z_0, т.е. при $t = 0$; это доказывает второе утверждение леммы.

Докажем теперь теорему Броди:

Теорема 4.4: *Пусть (X, h) - компактное эрмитово многообразие, не являющееся гиперболическим. Тогда существует непостоянное голоморфное отображение $g : \mathbb{C} \to X$. Более того, $||g'(t)||_h \leq 1$.*

Доказательство: Как мы уже заметили, имеется последовательность отображений $f_m : \Delta \to X$ с неограниченной производной в нуле $f'_m(0)$; применяя лемму Броди, получим последовательность $g_m : D(0, R_m) \to X$, $R_m \geq 1/2||f'_m(0)||_h$, $||g'_m(0)||_h = 1$, $||g'_m(z)||_h \leq \frac{1}{1-|z/R_m|^2}$. В частности, на любом компакте получаем равномерную оценку для производных g_m.

Семейство g_m локально равностепенно непрерывно, т.е. для любого $\epsilon > 0$ и компакта K, существует $\delta > 0$, т.ч. из $z, z' \in K$, $|z - z'| < \delta$ следует, что $|g_m(z) - g_m(z')| \leq \epsilon$ для всех m. К тому же, поскольку X компактно, для любого z множество $\{g_m(z)\}$ относительно компактно в X. Значит, по теореме Асколи получим подпоследовательность $\{g_k\}$, сходящуюся к голоморфному отображению $g : \mathbb{C} \to X$. При этом имеем также $||g'(t)||_h \leq 1$, поскольку нормы Пуанкаре на дисках сходятся к евклидовой норме на $\mathbb{C}$.

(Здесь вместо того, чтобы ссылаться на теорему Асколи, можно рассмотреть плотное счетное подмножество $\{z_1, \ldots, z_n, \ldots\}$ в X; выделяя подпоследовательности, сходящиеся в $z_1, z_2, \ldots$ и применяя диагональный трюк, получим подпоследовательность, которая сходится во всех точках нашего плотного подмножества; потом воспользуемся локальной равностепенной непрерывностью. Теорема Асколи, собственно, ровно так и доказывается.)

Из леммы Броди можно получить большое количество следствий:

Предложение 4.5: *Гиперболичность - открытое свойство.*

Доказательство: Пусть $\mathcal{X} \to S$ - семейство многообразий, h - эрмитова метрика на $\mathcal{X}$ и $s_k \in S$ сходятся к пределу s. Предположим, что слои X_{s_k} не являются гиперболическими. Тогда существуют отображения $g_k : \mathbb{C} \to X_{s_k}$, $||g'_k(0)|| = 1$, $||g'_k(t)|| \leq 1$. Как в доказательстве 4.4, получаем предел $g : \mathbb{C} \to X_s$ (он не постоянен, поскольку производная в нуле равна единице). Так что X_s не является гиперболическим и свойство негиперболичности замкнуто.

Это предложение используется для построения примеров гиперболических многообразий следующим образом: на самом деле почти все наши рассуждения имеют смысл не только для неособых многообразий, но и для произвольных компактных комплексных пространств, вложенных в неособое многообразие. Несложно строятся, скажем, примеры особых гиперповерхностей в $\mathbb{P}^3$ без целых кривых. Затем говорится, что в силу свойства открытости их малые деформации (уже неособые!) будут гиперболическими. ("Большие" деформации гиперболическими не будут; свойство гиперболичности открыто в аналитической топологии, но не в топологии Зариского).

Пример (Дюваль, Фудзимото): $X \subset \mathbb{P}^3$, заданная уравнением

$$P(z_0, z_1, z_2)^2 - Q(z_2, z_3) = 0,$$

где P, Q - достаточно общие многочлены степени d и $2d$ соответственно, имеет изолированные особенности в точках $(z_0 : z_1 : 0 : 0)$, $P(z_0, z_1, 0) = 0$. Разрешение особенностей отображается на $\mathbb{P}^1$: $(z_0 : z_1 : z_2 : z_3) \mapsto (z_2 : z_3)$. При разложении Штейна получается кривая C с неоднородным уравнением $t^2 = Q(1, z_3)$; слои отображения $\tilde{X} \to C$ задаются уравнениями $t = P(z_0, z_1, 1)$. При $d > 3$ и база, и слои имеют род по крайней мере 2; значит, $\tilde{X}$ не содержит целых кривых. Отображение из $\mathbb{C}$ в X можно поднять на $\tilde{X}$; т.е. X не содержит целых кривых и ее малые деформации гиперболичны. Таким образом, существуют гиперболические гиперповерхности четной степени, начиная с 8. Напомним, что гипотеза Кобаяши утверждает, что общая гиперповерхность степени 5 и выше в $\mathbb{P}^3$ гиперболична.

Предложение 4.6: *Подмногообразие тора гиперболично тогда и только тогда, когда оно не содержит сдвигов подтора.*

Доказательство: Рассмотрим тор T с плоской метрикой. Пусть $X \subset T$ не является гиперболичным; тогда существует кривая Броди $f : \mathbb{C} \to X$ с $||df(z)|| \leq 1$ для любого z. Отображение f поднимается на универсальное накрытие:

$$(f_1, \dots f_n) : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^n, \ \sum |f_i'|^2 \leq 1.$$

То есть, для любого i , f_i' постоянно; т.е. f_i аффинно, другими словами, $f(\mathbb{C})$ - сдвиг однопараметрической подгруппы. А значит, по стандартной лемме, замыкание соответствующего сдвига $f(\mathbb{C})$ - тоже подгруппа, т.е. подтор. Что и требовалось доказать.

Замечание 4.7: В общем случае *кривой Броди* называют непостоянное голоморфное отображение $g : \mathbb{C} \to X$ с ограниченной производной. Пусть X содержит целую кривую $f : \mathbb{C} \to X$. Образ кривой Броди, получающейся в результате применения леммы о репараметризации, может, вообще говоря, довольно сильно отличаться от $f(\mathbb{C})$: единственное, в чем мы можем быть уверены - это что замыкание образа кривой Броди лежит в замыкании $f(\mathbb{C})$. Поэтому Предложение 4.6 - это более слабое утверждение, чем знаменитая

Гипотеза Блоха: *Пусть $h^0(X, \Omega_X^1) > dim(X)$. Тогда любая целая кривая на X содержится в собственном подмногообразии.*

(На первый взгляд может показаться - как показалось в некоторый момент автору - что отображение Альбанезе сводит это утверждение к предыдущему).

Хорошую иллюстрацию того, насколько геометрия кривых Броди может отличаться от геометрии целых кривых на многообразии, приводит Винкельман в работе [W]: оказывается, можно построить такое раздутие абелева многообразия, что все кривые Броди содержатся в исключительном дивизоре!

Гипотеза Блоха доказана, например, в работе [GG] с помощью расслоений джетов; см. также [D]. К этой технологии мы ещё вернемся в последней части этих записок. Существуют и другие доказательства этого утверждения.

Рассмотрим ещё одно простое следствие леммы Броди. Напомним, что векторное расслоение E на X называется обильным, если обильно линейное расслоение $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E^*)}(1)$. Нетрудно заметить, что обильность E равносильна стягиваемости нулевого сечения E^*.

Предложение 4.8: *Многообразие с обильным кокасательным расслоением гиперболично.*

Доказательство: Если нет, то пусть $g : \mathbb{C} \to X$ - кривая Броди. Она поднимается на TX с помощью производной. Поскольку производная ограничена, то умножением на скаляр можно добиться, чтобы образ отображения $g' : \mathbb{C} \to TX$ попал в малую окрестность нулевого сечения. Теперь пусть $f : TX \to Y$ - стягивание нулевого сечения. Образ малой окрестности нулевого сечения попадет в полидиск $V \subset X$, который гиперболичен. Так что образ g' должен попасть в нулевое сечение, но этого не может быть, ведь g непостоянно.

5. Гиперболичность и метрики отрицательной кривизны

Очевидно, если многообразие X гиперболическое, то оно не содержит ни рациональных, ни эллиптических кривых. В действительности нетрудно доказать и более сильное утверждение. Напомним, что проективное многообразие X *алгебраически гиперболично*, если существует положительная константа ϵ, такая, что для любой кривой $C \subset X$, $2g(C)-2 \geq \epsilon deg(C)$ (конечно, можно также считать, что X всего лишь кэлерово, и понимать под $deg(C)$ пересечение C с каким-нибудь фиксированным кэлеровым классом). Сейчас мы докажем, что гиперболическое многообразие алгебраически гиперболично. Доказательство - хороший пример “аргументов отрицательной кривизны”.

Напомним, что если h - эрмитова метрика на комплексном линейном расслоении L, то ее кривизна Θ_h определяется как

$$\Theta_h = -\frac{i}{\pi}\partial\bar{\partial}log||s||_h$$

(здесь s - локальное голоморфное сечение L, не обращающееся в нуль. При замене s на другое такое сечение Θ_h не изменится, т.к. “добавится” (нулевой) $\partial\bar{\partial}log$ от модуля обратимой функции).

Непосредственным вычислением получаем, что для метрики Пуанкаре h_P на Δ,

$$\Theta_{h_P} = -\frac{2}{\pi}\omega_P,$$

где $\omega_P = i\frac{dz\wedge d\bar{z}}{(1-|z|^2)^2}$ - (1,1)-форма, ассоциированная с метрикой Пуанкаре. Другими словами, h_P имеет постоянную отрицательную скалярную кривизну $-\frac{2}{\pi}$.

Итак, докажем

Предложение 5.1: *Гиперболическое многообразие X алгебраически гиперболично.*

Доказательство: Пусть $f : C \to X$ - отображение из неособой кривой, являющееся вложением в общей точке; поскольку C не может быть ни рациональной, ни эллиптической, то ее универсальное накрытие - это Δ:

$$\Delta \xrightarrow{\rho} C \xrightarrow{f} \overline{C} \xrightarrow{j} X.$$

($\overline{C}$ - это образ f). Пусть h - кэлерова метрика на X, и ω - соответствующая (1,1)-форма. Обозначим форму, ассоциированную с гиперболической метрикой на C, также за σ_P (как и на Δ).

Поскольку X гиперболично, для некоторого $\delta > 0$,

$$k_X(\xi) \geq \delta||\xi||_h, \ \xi \in TX$$

(здесь k_X - псевдометрика Кобаяши на X). Пусть $\sigma_{\overline{C}}$ - ограничение k_X на $\overline{C}$; имеем

$$\Theta_{h_P} = -\frac{2}{\pi}\sigma_P \leq -\frac{2}{\pi}f^*\sigma_{\overline{C}} \leq -\frac{2}{\pi}\delta^2 f^*\omega$$

(первое неравенство выполнено, поскольку голоморфные отображения, очевидно, уменьшают расстояния в метрике Кобаяши). Но по формуле Гаусса-Бонне

$$\int_C \Theta_{h_P} = \chi(C) = 2 - 2g(C),$$

так что, интегрируя, получим

$$2g(C) - 2 \geq \frac{2}{\pi}\delta^2 deg_\omega C,$$

что и требовалось доказать.

Теперь мы увидим, как с помощью “аргументов отрицательной кривизны” можно в некоторых случаях доказывать гиперболичность. Сделаем сначала небольшое отступление об *эрмитовых метриках с особенностями* (их изучал Ж.-П. Демайи).

Пусть L - комплексное линейное расслоение на X. *Эрмитова метрика с особенностями* h на L задается локально интегрируемым потенциалом ϕ: локально в тривиализации положим

$$||\xi||_h = |\xi|e^{-\phi(x)},\ \xi \in T_x X.$$

Условие $\phi \in L^1_{loc}$ нужно для того, чтобы можно было определить кривизну

$$\Theta_h(L) = \frac{i}{\pi}\partial\bar{\partial}\phi$$

как (вещественный замкнутый) (1,1)-поток. Особый интерес представляет случай, когда этот поток положителен (или отрицателен). Напомним, что поток T типа (p,p) вещественен, если $\overline{T(\varphi)} = T(\overline{\varphi})$ для $\varphi \in A_c^{n-p,n-p}$, и положителен, если $T(\eta \wedge \bar{\eta})$, домноженное на подходящую степень i, неотрицательно для $\eta \in A_c^{n-p,0}$. Для $p = 1$ это эквивалентно тому, что в (локальной) записи

$$T = \frac{i}{2} t_{ij} dz_i \wedge d\bar{z}_j,$$

эрмитова матрица из распределений (t_{ij}) "положительно определена" - т.е. $\sum t_{ij}\lambda_i\bar{\lambda}_j$ есть положительное распределение для всех λ.

Положительность потока $\frac{i}{\pi}\partial\bar{\partial}\phi$ эквивалентна *плюрисубгармоничности* функции ϕ. Основной пример плюрисубгармонической функции - логарифм модуля голоморфной функции g. Формула Лелона-Пуанкаре утверждает, что в этом случае получается просто поток интегрирования по дивизору нулей g (подробности см., например, [Sh]).

Вот некоторые важные для нас примеры эрмитовых метрик с особенностями:

1) Прообраз: пусть $f : \Delta \to (X, h)$. Тогда

$$f^*h = u(z)|f'(z)|^2 dz \otimes d\bar{z},\ u > 0,\ u \in C^\infty.$$

Имеем

$$-\phi = log|f'| + log(u)/2;$$

если кривизна h была отрицательной, то кривизна f^*h будет как минимум столь же отрицательна.

2) "Фубини-Штуди": Пусть L - линейное расслоение с сечениями $s_0, \dots s_N$. Определим h локально в тривиализации по формуле

$$||\xi||_h^2 = \frac{|\xi|^2}{\sum |s_i(x)|^2}.$$

Тогда $\phi = log(\sum |s_i(x)|^2)/2$; $\frac{i}{\pi}\partial\bar{\partial}\phi$ положителен. Наша метрика с особенностями h является прообразом метрики Фубини-Штуди на расслоении $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(1)$ при отображении $X \dashrightarrow \mathbb{P}^N$, заданном сечениями $s_0, \dots s_N$.

Ключевое для нас утверждение - это

Лемма 5.2 (лемма Альфорса-Шварца): *Пусть $h(z) = u(z)dz \otimes d\bar{z}$ - эрмитова метрика с особенностями на Δ, ω_h соответствующая (1,1)-форма (точнее, поток!). Предположим, что $i\partial\bar{\partial}log(u) \geq \epsilon\omega_h$ (опять же, в смысле потоков). Тогда $h \leq \frac{2}{\epsilon}h_P$ (тоже в смысле потоков! хотя, конечно, неравенство будет поточечным в случае гладкой h и поточечного неравенства в условии).*

Доказательство: Как в лемме Броди, можно предполагать, что h определена на чуть большем диске. Если h гладкая, рассмотрим функцию $a(z)$, такую, что $h = ah_P$. Она стремится к нулю на границе Δ, значит, достигает максимума в точке z_0 внутри Δ. Из того, что у a максимум в z_0, имеем $0 \geq i\partial\bar{\partial}log\ a(z_0)$, и далее:

$$i\partial\bar{\partial}log\, a(z_0) = i\partial\bar{\partial}log\, u(z_0) - i\partial\bar{\partial}log\, u_P(z_0) \geq \epsilon\omega_h(z_0) - 2\omega_P(z_0) = (\epsilon a(z_0) - 2)\omega_P(z_0),$$

что и требовалось доказать (здесь u_P и ω_P - функция и форма, очевидным образом ассоциированные с метрикой Пуанкаре).

Если h не гладкая, применяется аргумент сглаживания потоков: вместо максимума u/u_P рассматриваем максимум $exp(\rho_\epsilon * log(u))/u_P$, где ρ_ϵ - семейство сглаживающих ядер; см. [D].

Сейчас мы обсудим одно важное следствие этой леммы. Пусть L - линейное расслоение на X, $m >> 0$. Определим

$$\Sigma(L) = Bs(L^{\otimes m}) \cup \{x | dim(\varphi^{-1}_{|L^{\otimes m}|}\varphi_{|L^{\otimes m}|}(x)) > 0\}$$

(при достаточно больших m это действительно не зависит от m). Другими словами, $\Sigma(L)$ - объединение базисного множества и строго положительномерных слоев рационального отображения $\varphi_{|L^{\otimes m}|}$, задаваемого полной линейной системой $|L^{\otimes m}|$. Хорошо известно, что на самом деле $\varphi_{|L^{\otimes m}|}$ является вложением вне $\Sigma(L)$.

Предложение 5.3: *Пусть A - обильное линейное расслоение на X, $\pi : \mathbb{P}TX \to X$ - проекция, $f : \mathbb{C} \to X$ - целая кривая, $\tilde{f} : \mathbb{C} \to \mathbb{P}TX$ - ее подъем на $\mathbb{P}TX$. Тогда для всех $m > 0$*

$$\tilde{f}(\mathbb{C}) \subset \Sigma(\mathcal{O}_{\mathbb{P}TX}(m) \otimes \pi^* A^{-1}).$$

Прежде чем приводить доказательство, сделаем несколько замечаний:

1)$\Sigma(L) \neq X$ означает, что L объемно (а $\Sigma(L) = \emptyset$ - что L обильно); в этом случае $\Sigma(L)$ - собственное подмногоообразие. Таким образом, наше предложение содержательно если и только если $\mathcal{O}_{\mathbb{P}TX}(m)$ объемно (в этом случае

$\mathcal{O}_{\mathbb{P}TX}(m)\otimes\pi^*A^{-1}$ тоже объемно: объемность - открытое свойство). Мы видели, что, например, для поверхности общего типа это значит, что $c_1^2 > c_2$.

2) На самом деле с помощью теории Неванлинны доказывается более сильное утверждение, что $\tilde{f}(\mathbb{C})\subset Bs(\mathcal{O}_{\mathbb{P}TX}(m)\otimes\pi^*A^{-1})$; для приложений это, кажется, все равно.

3) Если бы вместо $\mathbb{C}$ у нас была рациональная или эллиптическая кривая, то это утверждение было бы совершенно очевидным. В самом деле, из того, что $\tilde{f}_*$ отображает T_C в $\mathcal{O}_{\mathbb{P}TX}(-1)$, следует, что $deg(\mathcal{O}_{\mathbb{P}TX}(m)\otimes\pi^*A^{-1}|_C) < 0$ при $m>0$ и $g(C)\leq 1$.

4) Как обильность, так и объемность интерпретируются в терминах метрик положительной кривизны. Обильность равносильна существованию гладкой метрики положительной кривизны: это теорема Кодаиры о вложении. Объемность же L равносильна существованию метрики с особенностями h, такой, что $\Theta_h(L)\geq\epsilon\omega_h$ в смысле потоков (условие положительности в смысле потоков было бы слишком слабым, т.к. положительность в смысле потоков - это, скорее, неотрицательность!)

Доказательство предложения 5.3: Можно предполагать, что расслоение $\mathcal{O}_{\mathbb{P}TX}(m)\otimes\pi^*A^1$ объемно - ведь иначе утверждение пусто. Предположим, что образ $\tilde{f}(\mathbb{C})$ не содержится в $\Sigma(\mathcal{O}_{\mathbb{P}TX}(m)\otimes\pi^*A^{-1})$. Построим на $\mathbb{C}$ метрику с особенностями, удовлетворяющую лемме Альфорса-Шварца. Поскольку A обильно, на нем можно выбрать метрику положительной кривизны h_A; имеем, для достаточно малого ϵ,

$$-\frac{i}{\pi}\partial\bar{\partial}log\ u_A\geq\epsilon\omega_{h_A}$$

(обозначения u,ω - как в лемме). Определим метрику h на $L_m=\mathcal{O}_{\mathbb{P}TX}(m)\otimes\pi^*A^1$ как прообраз метрики Фубини-Штуди, т.е. локально в тривиализации

$$||\xi||_h^2=\frac{|\xi|^2}{\sum|\sigma_i(x)|^2};$$

это метрика положительной кривизны, так как L_m объемно. Значит, на $\mathcal{O}_{\mathbb{P}TX}(-1)$ имеем метрику (строго!) отрицательной кривизны $(h\pi^*h_A)^{-1/m}$; так как f_* отображает касательное расслоение к $\mathbb{C}$ в $\mathcal{O}_{\mathbb{P}TX}(-1)$, получаем метрику строго отрицательной кривизны на $\mathbb{C}$, а именно,

$$h_0=\tilde{f}^*((h\pi^*h_A)^{-1/m})=u(z)dz\otimes d\bar{z}$$

(это не ноль, поскольку $\tilde{f}(\mathbb{C})$ не попадает в $\Sigma(\mathcal{O}_{\mathbb{P}TX}(m)\otimes\pi^*A^{-1})$! Заметим, что непопадания $\tilde{f}(\mathbb{C})$ в базисное множество L_m здесь недостаточно). Имеем

$$\frac{i}{\pi}\partial\bar{\partial}log\ u=-\Theta_{\tilde{f}^*(h\pi^*h_A)^{-1/m}}\geq f^*\Theta_{h_A^{-1/m}}.$$

По компактности X и положительности h_A, $f^*\Theta_{h_A^{-1/m}}$ не меньше формы, ассоциированной с $c||f'(z)||_{h_X}^2dz\otimes d\bar{z}$, для произвольной эрмитовой метрики h_X и некоторой зависящей от нее константы c, а это, в свою очередь, не меньше $c'\omega_{h_0}$ для некоторой другой константы c', поскольку оба выражения квадратично зависят от производной f. Так что, по лемме Альфорса-Шварца, $h_0 \leq Const \cdot h_P$ в единичном диске. Но этого не может быть: рассматривая $f_R(z) = f(Rz)$, получим $R^2 h_0 \leq Const \cdot h_P$, т.е. наша метрика h_0 может быть определена лишь на диске некоторого ограниченного радиуса, но никак не на всем $\mathbb{C}$. Предложение доказано.

Заметим, что мы передоказали предложение 4.8: действительно, если касательное расслоение X обильно, то $\Sigma(L_m)$ - пустое множество для достаточно больших m, то есть, на X не может быть целых кривых.

Следующее обобщение теоремы Богомолова является следствием предложения 5.3 и результатов Макквиллена ([MQ]):

Теорема 5.4 (М. Макквиллен, 1998) *Пусть S - поверхность общего типа с $c_1^2 > c_2$. Тогда образ любой целой кривой $f : \mathbb{C} \to S$ содержится в рациональной или эллиптической кривой на S (напомним, что по теореме Богомолова таких кривых лишь конечное число; другими словами, S "гиперболична вне собственного подмногообразия".).*

Идея доказательства: Неравенство $c_1^2 > c_2$ означает, что $\mathcal{O}_{\mathbb{P}TX}(1)$ объемно. То есть, по предыдущему предложению, образ $\tilde{f}$ лежит в дивизоре $D \subset \mathbb{P}TX$. Пусть $\tilde{D}$ - разрешение особенностей. Если D не доминирует S, то доказывать нечего - образ D в S и будет искомой рациональной или эллиптической кривой. Если D доминирует S, то $\tilde{D}$ общего типа. Кроме того, как мы уже видели, $\tilde{D}$ снабжено тавтологическим слоением, и наша целая кривая - его лист.

Теорема 5.4 теперь следует из другой теоремы Макквиллена:

Теорема 5.5 *У слоения на поверхности общего типа нет плотных параболических листов.*

Доказать эту теорему трудно, и в наши планы это не входит. Основная идея примерно такова: целой кривой $f : \mathbb{C} \to X$ можно сопоставить замкнутый положительный поток "интегрирования" по ней. Именно, положим

$$\Phi_r(\eta) = \frac{\int_0^r \frac{dt}{t} \int_{D_t} f^*(\eta)}{\int_0^r \frac{dt}{t} \int_{D_t} f^*(\omega)},$$

где ω - форма, ассоциированная с кэлеровой метрикой. Оказывается, можно выбрать последовательность $r_n \to \infty$ так, что предел Φ_{r_n} замкнут ("отношение длины к площади стремится к нулю"). Этот предел, априори, зависит от конкретной последовательности (r_n), но нам это не важно. Обозначим Φ какой-нибудь из таких замкнутых пределов. Важный факт состоит в том, что если $Z \subset X$ - не содержащая $Im(f)$ гиперповерхность, то $[\Phi] \cdot [Z] \geq 0$ (двойное интегрирование используется именно здесь - применяется формула Пуассона-Йенсена). В частности, если $Im(f)$ плотный, то Φ численно эффективен. Если X - поверхность общего типа, то K_X объемен. Из этого и из численной эффективности и нетривиальности Φ следует, что $K_X \cdot [\Phi] > 0$. Дальше доказывается, что на самом деле $K_X \cdot [\Phi] \leq 0$ - что было бы вполне логично, будь f "честной" рациональной или эллиптической кривой, но в нашем случае это глубоко нетривиальный результат о слоениях.

Отметим, наконец, что в 1990 году Лу и Яу доказали аналогичное 5.4 утверждение с более сильным предположением $c_1^2 > 2c_2$:

Предложение 5.6 *Пусть X - минимальная поверхность общего типа с $c_1^2 > 2c_2$. Тогда все голоморфные образы $\mathbb{C}$ на X алгебраически вырождены, т.е., содержатся в рациональных или эллиптических кривых.*

Их доказательство совсем простое и использует, кроме предложения 5.3, стабильность по Богомолову кокасательного расслоения к поверхности общего типа. А именно: заметив, что образ f содержится в неприводимом дивизоре $D \subset \mathbb{P}TX$ в силу 5.3, Лу и Яу доказывают (используя стабильность и неравенство $c_1^2 > 2c_2$), что $\mathcal{O}_{\mathbb{P}TX}(1)|_D$ по-прежнему объемен. Доказательство мы оставим в качестве упражнения.

(Указания: Пусть $D \in |\mathcal{O}_{\mathbb{P}TX}(k) \otimes \pi^* F^{-1}|$. Оцените FK_X с помощью стабильности по Богомолову. Выведите отсюда, что $L^2 > 0$ (где $L = \mathcal{O}_{\mathbb{P}TX}(1)|_D$). Затем покажите, что $L^{-m} \otimes K_D$ отрицательно пересекается с численно эффективным $\pi^* K_X|_D$ и поэтому не может быть эффективен.)

Затем тот же трюк с метриками, что и в доказательстве 5.3, применяется на разрешении особенностей $\tilde{D}$ (вместо $\mathbb{P}TX$). В конце концов получается, что образ f должен содержаться в собственном подмногообразии $\tilde{D}$, т.е. в кривой, ч.т.д..

Замечание 5.7: Почти все "очевидные" примеры поверхностей удовлетворяют $c_1^2 \leq 2c_2$. Тем не менее, можно построить и поверхности с $c_1^2 = kc_2$ для всех рациональных $2 < k \leq 3$ (неравенство $k \leq 3$ выполнено всегда - это знаменитое неравенство Мияоки-Богомолова): см., например, [S]. Грубо говоря, они получаются заменой базы из очень специального расслоения на кривые (у него $c_1^2 = 3c_2$!) над кривой довольно большого рода. Такие поверхности для нас не особенно интересны: ведь у них большая иррегулярность, и поэтому утверждение следует из много раз доказанной и передоказанной "гипотезы Блоха". Но существуют и односвязные примеры с k вплоть до 2,7 : они обнаружены Ченом в конце 80-х годов ([Ch]).

6. Расслоения джетов

Эта заключительная часть пректически не содержит полных доказательств. Ее цель - ознакомить читателя с идеями Грина-Гриффитса, Демайи и их последователей о том, как можно получать информацию о целых кривых, используя расслоения джетов.

В предыдущей части мы рассматривали случай, когда расслоение $S^m\Omega^1_X$ имеет сечения (и даже достаточно много сечений; но это последнее условие, в принципе, можно ослабить) при больших m. В то же время, для наиболее "очевидных" многообразий - гиперповерхностей - это не так.

Предложение 6.1 *Если $X_d \subset \mathbb{P}^n$ - гиперповерхность, то $H^0(X, S^m\Omega^1_X) = 0$ для любого $m > 0$.*

Доказательство: Имеем точную последовательность Эйлера

$$0 \to \Omega^1_{\mathbb{P}^n} \to \oplus_{n+1}\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1) \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \to 0,$$

и из нее

$$0 \to S^k\Omega^1_{\mathbb{P}^n} \to \oplus_{\dots}\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-k) \to \oplus_{\dots}\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1-k) \to 0.$$

С другой стороны, точно так же из

$$0 \to \mathcal{O}_X(-d) \to \Omega^1_{\mathbb{P}^n}|_X \to \Omega^1_X \to 0$$

получаем

$$0 \to S^{k-1}\Omega^1_{\mathbb{P}^n}|_X \otimes \mathcal{O}_X(-d) \to S^k\Omega^1_{\mathbb{P}^n}|_X \to S^k\Omega^1_X \to 0.$$

Из этих точных последовательностей сразу следует то, что нужно.

Напомним, что в предыдущей части сечения подкруток пучка $S^m\Omega^1_X$ использовались для того, чтобы получать дифференциальные уравнения первого порядка, которым должна удовлетворять целая кривая $f : \mathbb{C} \to X$. Грин и Гриффитс обнаружили, что и в отсутствие таких сечений - например, на гиперповерхности X - наша кривая будет удовлетворять алгебраическим дифференциальным уравнениям, порядка два или выше; эти уравнения получаются из сечений пучков "k-джет-дифференциалов" на X. Впоследствии Демайи и Эль Гуль, используя более тонкий вариант конструкции Грина и Гриффитса, доказали гиперболичность общей гиперповерхности степени 21 и выше в $\mathbb{P}^3$. Схема доказательства напоминает упомянутый в конце предыдущей части аргумент Лу и Яу, но само доказательство гораздо сложнее технически. Сейчас мы постараемся объяснить, что же примерно там происходит.

Джеты Грина-Гриффитса:

Рассмотрим ростки отображений $f : \Delta \to X$:

$$f(z) = f^{(0)} + f^{(1)}z + \ldots + f^{(k)}z^k/k! + \ldots,\ f^{(0)} = x,\ f^{(i)} \in \mathbb{C}^n.$$

Введем отношение эквивалентности на множестве ростков: назовем два ростка эквивалентными, если они совпадают до $f^{(k)}$ включительно. Множество классов эквивалентности обозначим $J_k(X)_x$. Пусть $J_k(X) = \cup_{x\in X} J_k(X)_x$. Имеется естественная проекция $J_k(X) \to X$; каждый ее слой $J_k(X)_x$ естественно изоморфен $\mathbb{C}^{kn}$, но глобально $J_k(X)$ не является векторным расслоением на X (функции перехода нелинейны). Имеются также естественные проекции $J_{k+1}(X) \to J_k(X)$ ("забвение $f^{(k+1)}$"); это аффинные расслоения (если зафиксировать $f^{(i)}, i \leq k$, то $f^{(k+1)}$ ведет себя при замене координат таким же образом, как и касательный вектор). Пусть nc обозначает непостоянные ростки; рассмотрим

$$P_k^{GG}(X) = J_k^{nc}(X)/\mathbb{C}^*,$$

где $\mathbb{C}^*$ действует гомотетиями Δ, то есть

$$\lambda(f^{(0)}, f^{(1)}, \ldots, f^{(k)}) = (f^{(0)}, \lambda f^{(1)}, \ldots, \lambda^k f^{(k)}).$$

$P_k^{GG}(X)$ называется *расслоением k-джетов Грина-Гриффитса.* Очевидно, слои $F_{k,n}$ естественной проекции $\pi_k^{GG} : P_k^{GG}(X) \to X$ - взвешенные проективные пространства $\mathbb{P}(1, \ldots, 1, 2 \ldots, 2, \ldots, k, \ldots, k)$ размерности $kn - 1$. При $k = 1$ $P_1^{GG}(X) = \mathbb{P}TX$.

На слоях $F_{k,n}$ - точнее, на соответствующих аффинных пространствах $\mathbb{C}^{kn}$ - можно рассмотреть взвешенно-однородные многочлены степени m, т.е. ϕ такие, что $\phi(\lambda v) = \lambda^m \phi(v)$. Такие многочлены с коэффициентами - функциями на X являются сечениями пучков $J_{k,m}$ на X. Например, при $k = 1$, $J_{1,m} = S^m \Omega_X^1$. При $k = 2$, сечения $J_{2,2}$ локально записываются как $\phi = \sum a_{ij} f_i' f_j' + \sum b_i f_i''$. Грин и Гриффитс назвали $J_{k,m}$ *пучками k-джет-дифференциалов степени m.*

Разумеется, наши многочлены $\phi(v)$ степени m можно рассматривать и как сечения пучков $\mathcal{O}_{P_k}^{GG}(m)$ ранга 1 на $P_k^{GG}(X)$. Эти пучки не всегда будут обратимыми, поскольку $F_{k,n}$ - взвешенные (а не просто) проективные пространства; но они обратимы, например, если m кратно $k!$.

На $J_{k,m}$ имеется фильтрация, которая позволяет сосчитать эйлерову характеристику. Она строится так: рассмотрим частичную фильтрацию по степеням $f^{(k)}$:

$$J_{k-1,m} = F_0 \subset F_1 \subset \ldots \subset F_{[m/k]} = J_{k,m}.$$

Ее факторы F_i/F_{i-1} изоморфны $S^i \Omega_X^1 \otimes J_{k-1,m-ki}$: это следует из того замечания, что $f^{(k)}$ ведет себя как касательный вектор при фиксированных $f^{(<k)}$. Итерируя процесс, получим в конце концов фильтрацию на $J_{k,m}$ с факторами, изоморфными

$$S^{i_1} \Omega_X^1 \otimes \ldots \otimes S^{i_k} \Omega_X^1, \ i_1 + 2i_2 + \ldots + ki_k = m.$$

Отсюда Грин и Гриффитс вывели, в частности, следующее

Предложение 6.2: *Для поверхности X, рассмотрим $\chi(X, J_{2,m})$ как функцию m. Тогда*

$$\chi(X, J_{2,m}) = \frac{1}{4^3 3!}(7c_1^2 - 5c_2) m^{dim\ P_k^{GG}(X)} + o(m^{dim\ P_k^{GG}(X)}).$$

Чтобы получить информацию об $H^0(X, J_{2,m})$ для больших m - например, доказать, что $\mathcal{O}_{P_2}^{GG}(m)$ объемен, если m - большая кратность $k!$ - нужно контролировать $H^2(X, J_{2,m})$. В интересующем нас случае, когда X - общего типа, такой контроль обеспечивается стабильностью по Богомолову. Одно из следствий (или даже часть определения - зависит от выбора точки зрения!) стабильности по Богомолову касательного расслоения к X - это следующее

Утверждение 6.3: *Если сечение*

$$s \in H^0(X, S^{i_1}T_X \otimes \ldots \otimes S^{i_k}T_X \otimes K_X^{(i_1+\ldots+i_k)/2})$$

обращается в нуль в некоторой точке X, то оно нулевое.

($S^{i_1}T_X \otimes \ldots \otimes S^{i_k}T_X \otimes K^{(i_1+\ldots+i_k)/2}$ - это в точности подкрутка $S^{i_1}T_X \otimes \ldots \otimes S^{i_k}T_X$ с нулевым детерминантом).

Значит, если $q < (i_1 + \ldots + i_k)/2$, то $H^0(X, S^{i_1}T_X \otimes \ldots \otimes S^{i_k}T_X \otimes K_X^q) = 0$. Дуализируя, получим, что $H^2(X, S^{i_1}\Omega_X^1 \otimes \ldots \otimes S^{i_k}\Omega_X^1)$ при $i_1 + \ldots + i_k > 2$, т.е.

$$H^2(X, J_{k,m}) = 0, \ m > 2k.$$

То есть, расслоение $\mathcal{O}_{P_2}^{GG}(m)$ на P_2^{GG} действительно будет объемным для достаточно больших m, кратных $k!$, при условии, что $c_1^2 > 5c_2/7$.

Напомним, что для гиперповерхности степени d в $\mathbb{P}^3$

$$c_1^2 = d(d-4)^2; \ c_2 = d(d^2 - 4d + 6);$$

значит, последнее утверждение выполняется начиная с $d = 16$.

Пусть теперь $f : \mathbb{C} \to X$ - голоморфное отображение. Очевидно, f поднимается на P_2^{GG} посредством первой и второй производных: $f_2 : \mathbb{C} \to P_2^{GG}(X)$. В этой ситуации можно доказать аналог Предложения 5.3: образ f_2 попадет в "плохое множество" для $\mathcal{O}_{P_2}^{GG}(m) \otimes (\pi_k^{GG})^* A^{-1}$, где A обилен на X (на самом деле он попадет и в базисное множество, но для того, чтобы это доказать, нужна теория Неванлинны). Значит, можно сделать такое

Заключение 6.4: *При $d \geq 16$, образ f_2 лежит в собственном подмногообразии $P_2^{GG}(X)$; другими словами, кривая f удовлетворяет некоторым алгебраическим дифференциальным уравнениям второго порядка.*

К сожалению, мы не можем сказать ничего особенного про наше собственное подмногообразие - оно может быть весьма большим, например, четырехмерным! А нам бы хотелось, как и в предыдущей части, посадить образ f_2 на алгебраическую поверхность и использовать теорему МакКвиллена. Но джетов Грина-Гриффитса просто "слишком много" для того, чтобы этого добиться. Демайи предложил более экономичную конструкцию "джетов Семпла-Рота"; ее недостаток в том, что описать джеты Семпла-Рота в терминах, удобных для вычисления эйлеровой характеристики, в общем случае значительно труднее, чем описать джеты Грина-Гриффитса. В интересующем нас сейчас случае 2-джетов такой проблемы, впрочем, не возникает.

Джеты Семпла-Рота-Демайи:

Грубо говоря, это фактор $J_k(X)$ по всем росткам замен координат на Δ (а не только по гомотетиям). Конечно, такого фактора на самом деле не существует; поэтому берется некоторая открытая часть J_k^{reg}, фактор $J_k^{reg}/\mathbb{G}_k$ (где $\mathbb{G}_k$ - группа ростков биголоморфных отображений Δ в себя) и компактификация $X_{[k]}$. На самом деле $X_{[k]}$ можно построить и другим способом - потребовав, чтобы все отображения из $\mathbb{C}$ в X поднимались на $X_{[k]}$. Вот как это делается в [D]:

Рассмотрим пару (X, V), $V \subset T_X$. По такой паре построим новую пару $(\tilde{X}, \tilde{V})$, $\tilde{V} \subset T_{\tilde{X}}$: положим

$$\tilde{X} = \mathbb{P}(V);\ \pi : \tilde{X} \to X;\ \tilde{V}_{x,[v]} = \{\xi \in T_{\tilde{X},(x,[v])} | \pi_* \xi \in \mathbb{C}v\}.$$

Очевидно, если образ $f : \mathbb{C} \to X$ касателен к V, то отображение f поднимается до $\tilde{f} : \mathbb{C} \to \tilde{X}$ (с помощью производной), и образ $\tilde{f}$ будет касателен к $\tilde{V}$.

Положим теперь $X_0 = X$; $V_0 = T_X$; определим $(X_{[k]}, V_{[k]})$ как $(\tilde{X}_{[k-1]}, \tilde{V}_{[k-1]})$. Пусть $\pi_{0,k} : X_{[k]} \to X$, $\pi_{l,k} : X_{[k]} \to X_{[l]}$ - естественные проекции.

Пусть $\mathcal{O}_{X_{[k]}}(1)$ - тавтологическое линейное расслоение на $X_{[k]}$, рассматриваемом как проективное расслоение над $X_{[k-1]}$. Обозначим $E_{k,m} = (\pi_{0,k})_* \mathcal{O}_{X_{[k]}}(1)$.

Имеет место аналог предложения 5.3:

Предложение 6.5 *Пусть $f : \mathbb{C} \to X$ - целая кривая и $f_{[k]} : \mathbb{C} \to X_{[k]}$ - ее поднятие на $X_{[k]}$. Тогда для обильного A на X и любого $m > 0$, образ $f_{[k]}$ лежит в $\Sigma(\mathcal{O}_{X_{[k]}}(m) \otimes A^{-1})$.*

Можно показать, что сечения $E_{k,m}$ - это $\mathbb{G}_k$-инвариантные k-джет-дифференциалы степени m на X: то есть, $X_{[k]}$ действительно является "фактором" расслоения джетов Грина-Гриффитса по действию $\mathbb{G}_k$ (а точнее, ядра отображения первой производной в нуле из $\mathbb{G}_k$ в $\mathbb{C}^*$). При $k = 1$ это, конечно, снова просто $S^m\Omega^1_X$. Для произвольного k описать $E_{k,m}$ непросто, но для $k = 2$ на $E_{2,m}$ имеется фильтрация с факторами, изоморфными $S^{m-3j}\Omega^1_X \otimes K^j_X$ ([D]). Как и раньше, из этого легко выводится следующее:

Предложение 6.6 *Пусть X - поверхность общего типа. Расслоение $\mathcal{O}_{X_{[2]}}(1)$ объемно при $c_1^2 \geq 9c_2/13$; если X - гиперповерхность в $\mathbb{P}^3$, последнее означает, что степень X не меньше 15.*

Из 6.5 и 6.6 получаем, что для любой целой кривой $f : \mathbb{C} \to X$, образ $f_{[2]} : \mathbb{C} \to X_{[2]}$ лежит на собственном подмногообразии $D \subset X_{[2]}$. Многообразие $X_{[2]}$ четырехмерно; для того, чтобы воспользоваться теоремой МакКвиллена, нам нужно показать, что если D трехмерно и доминирует X, то образ $f_{[2]}$ не может быть плотен в D. Демайи и Эль Гуль [DEG] доказывают (используя не только стабильность по Богомолову, но и, например, тот факт, что $Pic(X) = \mathbb{Z}$ для общей гиперповерхности степени не менее 4 в $\mathbb{P}^3$), что $\mathcal{O}_{X_{[2]}}(1)|_D$ объемен при $d \geq 21$. Как уже говорилось в предложении 5.6, из этого выводится, что образ $f_{[2]} : \mathbb{C} \to X_{[2]}$ лежит в собственном подмногообразии D, т.е. на поверхности; а теперь уже применима теорема Макквиллена - получаем, что образ $f : \mathbb{C} \to X$ должен содержаться в рациональной или эллиптической кривой на X. Но, как мы выяснили в первой части, таких кривых на общей X не бывает. Таким образом, Демайи и Эль Гуль доказали следующий результат:

Теорема 6.7 ([DEG]): *Общая поверхность степени d в $\mathbb{P}^3$ гиперболична по Кобаяши, если $d \geq 21$.*

References

[B] Ф.А. Богомолов: Семейства кривых на поверхности общего типа, Доклады АН СССР 236 (1977), номер 5, 1041–1044.

[Br] M. Brunella: Birational geometry of foliations. ЛЕЖИТ В СЕТИ:

http://www.impa.br/opencms/pt/downloads/birational.pdf

[Cl] H. Clemens: Curves on generic hypersurfaces, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (4) 19 (1986), no. 4, 629–636.

[Ch] Z. Chen, On the geography of surfaces, Math. Ann. 277 (1987), 141-164.

[D] J.-P. Demailly, Algebraic criteria for Kobayashi hyperbolicity and jet differentials, Algebraic geometry Santa Cruz 1995, 285–360, Proc. Sympos. Pure Math., 62, Part 2, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997. ЛЕЖИТ В СЕТИ:

http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/˜demailly/manuscripts/hypb.ps.gz

[Deb] O. Debarre, Hyperbolicity of complex varieties. ЛЕЖИТ В СЕТИ:

http://www-irma.u-strasbg.fr/˜debarre/DebarreCourse.pdf

[DEG] J.-P. Demailly, J. El Goul: Hyperbolicity of generic surfaces of high degree in projective 3-space, Amer. J. Math. 122 (2000), no. 3, 515–546. ЛЕЖИТ В СЕТИ: arXiv.org, math.AG/9804129.

[E] L. Ein: Subvarieties of generic complete intersections, Invent. Math. 94 (1988), no. 1, 163–169.

[GG] M. Green, Ph. Griffiths: Two applications of algebraic geometry to entire holomorphic mappings, The Chern Symposium 1979 (Proc. Internat. Sympos., Berkeley, Calif., 1979), pp. 41–74, Springer, New York-Berlin, 1980

[J] J.-P. Jouanolou: Hypersurfaces solutions d'une équation de Pfaff analytique, Math. Ann. 232 (1978), no. 3, 239–245

[L] S. Lang: Introduction to complex hyperbolic spaces, Springer-Verlag, New York, 1987

[M] Д. Мамфорд, Лекции о кривых на алгебраической поверхности.

[MD] M. Martin-Deschamps: Courbes de genre géométrique borné sur une surface de type général [d'après F. A. Bogomolov]. Séminaire Bourbaki (1977/78), Exp. No. 519, pp. 233–247, Lecture Notes in Math., 710, Springer, Berlin, 1979

[MQ] M. McQuillan: Diophantine approximations and foliations, Publ. Math. IHES 87 (1998), 121–174.

[N] J. Noguchi: A short analytic proof of closedness of logarithmic forms, Kodai Math. J. 18 (1995), 295-299.

[R1] H. Royden: Remarks on the Kobayashi metric. Several complex variables, II (Proc. Internat. Conf., Univ. Maryland, College Park, Md., 1970), pp. 125–137. Lecture Notes in Math., Vol. 185, Springer, Berlin, 1971

[R2] H. Royden: The extension of regular holomorphic maps. Proc. Amer. Math. Soc. 43 (1974), 306–310.

[S] A. J. Sommese: On the density of ratios of Chern numbers of algebraic surfaces, Math. Ann. 268 (1984), 207-222.

[Sh] Б.В. Шабат, Введение в комплексный анализ.

[V] C. Voisin: On a conjecture of Clemens on rational curves on hypersurfaces, J. Differential Geom. 44 (1996), no. 1, 200–213; erratum: J. Differential Geom. 49 (1998), no. 3, 601–611.

[W] J. Winkelmann: A projective manifold where Brody and entire curves behave very differently, arXiv, math.CV/0511142.

[X] G. Xu: Divisors on generic complete intersections in projective space. Trans. Amer. Math. Soc. 348 (1996), no. 7, 2725–2736.