ГРУППЫ И АЛГЕБРЫ ЛИ. ОСЕННИЙ СЕМЕСТР 2006.

ЛИСТОК 1. АЛГЕБРЫ ЛИ И ИХ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ.

1.0$^{!!}$. Поэкспериментируйте в наборе маленьких готических букв с помощью LaTeX'а.

1.1. Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли размерности n над полем K. Докажите, что $\dim \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \neq n-1$.

1.2. Для любых четырех элементов x_1, x_2, x_3, x_4 алгебры Ли выполняется тождество

$$[[[x_1, x_2]x_3], x_4] + [[[x_2, x_1]x_4], x_3] + [[[x_3, x_4]x_1], x_2] + [[[x_4, x_3]x_2], x_1] = 0.$$

1.3. Вычислите центр и коммутант алгебр $\mathfrak{gl}_n, \mathfrak{sl}_n, \mathfrak{so}_n, \mathfrak{sp}_{2n}$, а также алгебр верхнетреугольных и строго верхнетреугольных матриц.

1.4. Найдите алгебры дифференцирований коммутативной алгебры Ли и алгебры Гейзенберга. Последняя имеет базис $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, x_n, z$ с коммутационными соотношениями $[x_i, z] = [y_i, z] = 0, [x_i, y_j] = \delta_{i,j} z$ (символ Кронекера).

1.5$^{!}$ (Полупрямые произведения). Пусть $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2$ — алгебры Ли, и задан гомоморфизм $\rho : \mathfrak{g}_1 \to \mathrm{Der}(\mathfrak{g}_2)$.

а) Докажите, что формула

$$[(x_1, y_1), (x_2, y_2)] = ([x_1, x_2], \rho(x_1)y_2 - \rho(x_2)y_1 + [y_1, y_2])$$

задает на пространстве $\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$ структуру алгебры Ли. Эта алгебра Ли называется полупрямым произведением алгебр $\mathfrak{g}_1$ и $\mathfrak{g}_2$, соответствующим ρ, и обозначается через $\mathfrak{g}_1 \ltimes_\rho \mathfrak{g}_2$ или, когда понятно, какой гомоморфизм имеется ввиду, через $\mathfrak{g}_1 \ltimes \mathfrak{g}_2$. Докажите, что $\mathfrak{g}_2$ является идеалом, а $\mathfrak{g}_1$ подалгеброй в $\mathfrak{g}_1 \ltimes \mathfrak{g}_2$.

б) Пусть алгебра Ли $\mathfrak{g}$ как векторное пространство является прямой суммой идеала $\mathfrak{g}_2$ и подалгебры $\mathfrak{g}_1$. Постройте изоморфизм алгебры $\mathfrak{g}$ с подходящим полупрямым произведением $\mathfrak{g}_1 \ltimes_\rho \mathfrak{g}_2$.

1.6$^{!}$ (Операции над идеалами). Пусть $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ — два идеала в $\mathfrak{g}$. Тогда следующие подпространства в $\mathfrak{g}$ также являются идеалами:

а) $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$.

б) $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} := \{x + y | x \in \mathfrak{a}, y \in \mathfrak{b}\}$.

в) $[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}] := \{\sum_{i=1}^k [x_i, y_i] | x_i \in \mathfrak{a}, y_i \in \mathfrak{b}\}$.

г) $\mathfrak{z}_\mathfrak{a}(\mathfrak{b}) := \{x \in \mathfrak{a} | [x, y] = 0, \forall y \in \mathfrak{b}\}$.

д) $\mathfrak{n}_\mathfrak{a}(\mathfrak{b}) := \{x \in \mathfrak{a} | [x, y] \in \mathfrak{b}, \forall y \in \mathfrak{b}\}$.

1.7$^{!}$. Пусть $\mathfrak{a}$ — идеал, а $\mathfrak{b}$ — подалгебра в алгебре Ли $\mathfrak{g}$. Тогда

а) $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ является подалгеброй в $\mathfrak{g}$.

б) $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$ — идеал в $\mathfrak{b}$.

в) Алгебры Ли $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}/\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}/\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$ канонически изоморфны.

1.8$^{!}$. Докажите, что центр и коммутант алгебры Ли $\mathfrak{g}$ устойчивы относительно любого дифференцирования.

1.9. Здесь $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли.

а$^!$) Проверьте, что для $x \in \mathfrak{g}, d \in \mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ имеет место равенство $[d, \mathrm{ad}\, x] = \mathrm{ad}\, d(x)$. В частности, $\mathrm{ad}(\mathfrak{g})$ является идеалом в $\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$.

б$^!$) Далее предполагается, что $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = \{0\}$. В этом случае $\mathfrak{g}$ отождествляется с идеалом в $\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$. Докажите, что $\mathfrak{z}_{\mathrm{Der}(\mathfrak{g})}(\mathfrak{g}) = \{0\}$.

в$^!$) Покажите, что дифференцирование d алгебры $\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$, для которого $d(\mathfrak{g}) = \{0\}$ является нулевым.

г) Докажите, что если $\mathfrak{g}$ совпадает со своим коммутантом, то любое дифференцирование алгебры $\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ оставляет $\mathfrak{g}$ на месте.

д) В условиях пункта г) любое дифференцирование алгебры $\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ является внутренним.

1.10$^!$ (Расширения и ограничения полей). Пусть $K_1 \subset K_2 \subset K_3$ — поля и $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли над K_2. Определим алгебру Ли $\mathfrak{g}_{K_1}$ над K_1 как алгебру Ли $\mathfrak{g}$, рассмотренную как алгебра над K_1, и алгебру Ли $\mathfrak{g}^{K_3}$ над K_3 как $\mathfrak{g} \otimes_{K_2} K_3$. Как соотносятся между собой

а) Подалгебры $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}), \mathfrak{z}(\mathfrak{g}_{K_1}), \mathfrak{z}(\mathfrak{g}^{K_3})$ соответствующих алгебр.

б) Подалгебры $\mathcal{D}(\mathfrak{g}), \mathcal{D}(\mathfrak{g}_{K_1}), \mathcal{D}(\mathfrak{g}^{K_3})$.

в) Алгебры $\mathrm{Der}(\mathfrak{g}), \mathrm{Der}(\mathfrak{g}^{K_3})$.

1.11. Классифицируйте с точностью до изоморфизма все алгебры Ли размерности $\leqslant 3$ над полями $\mathbb{R}, \mathbb{C}$.

1.12$^!$. Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли, V — $\mathfrak{g}$-модуль, $\mathfrak{h}$ — идеал в $\mathfrak{g}$. Тогда $\mathfrak{h}V, V^{\mathfrak{h}} := \{v \in V | x_V v = 0, \forall x \in \mathfrak{h}\}$ являются $\mathfrak{g}$-подмодулями в V.

1.13$^!$. Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли, V — $\mathfrak{g}$-модуль, а U — подпростанство в V. Тогда $\mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(V) := \{x \in \mathfrak{g} | x_V U \subset U\}$ является подалгеброй в $\mathfrak{g}$, а $\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(V) := \{x \in \mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(V) | x_V|_U = 0\}$ — идеалом в $\mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(V)$.

1.14$^!$. Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли, V_1, V_2 — $\mathfrak{g}$-модули. Тогда для всех натуральных n и всех $x \in \mathfrak{g}$ имеет место равенство

$$x^n_{V_1 \otimes V_2} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k_{V_1} \otimes x^{n-k}_{V_2}.$$

1.15. Докажите, что тавтологические представления всех классических алгебр над алгебраически замкнутым полем характеристики 0 неприводимы.

1.16$^!$. То же верно для любой симметрической степени тавтологического представления алгебры $\mathfrak{sl}_2$.

1.17. Докажите, что присоединенное представление алгебры $\mathfrak{gl}_n$ изоморфно тензорному произведению её тавтологического представления и его сопряженного, алгебры $\mathfrak{so}_n$ — внешнему, а $\mathfrak{sp}_{2n}$ — симметрическому квадрату тавтологического представления. Для двух последних алгебр постройте изоморфизмы явно.

1.18* (Изоморфизмы классических алгебр малых размерностей). Основное поле — $\mathbb{C}$.

а) Рассмотрев подходящее трехмерное представление алгебры $\mathfrak{sl}_2$, докажите, что $\mathfrak{sl}_2 \cong \mathfrak{so}_3$.

б) Докажите, что $\mathfrak{sl}_2 \times \mathfrak{sl}_2 \cong \mathfrak{so}_4$.

в) Докажите, что $\mathfrak{sl}_4 \cong \mathfrak{so}_6$.

г) Докажите, что $\mathfrak{sp}_4 \cong \mathfrak{so}_5$.