ГРУППЫ И АЛГЕБРЫ ЛИ. ОСЕННИЙ СЕМЕСТР 2006.

ЛИСТОК 2. НИЛЬПОТЕНТНЫЕ И РАЗРЕШИМЫЕ АЛГЕБРЫ ЛИ.

2.1$^!$. Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли. Докажите, что следующие условия эквивалентны нильпотентности алгебры $\mathfrak{g}$:

а) Для некоторого (вариант: для любого) идеала $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ алгебры $\mathfrak{h}, \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ нильпотентны, и $\mathfrak{g}$ представляется в $\mathfrak{h}$ нильпотентными эндоморфизмами.

б) $\mathrm{ad}(x)$ — нильпотентный эндоморфизм для всех $x \in \mathfrak{g}$.

в) $\mathcal{B}_m(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}$ для достаточно большого m. Здесь идеал $\mathcal{B}_i(\mathfrak{g})$ определяется индуктивно следующим образом: $\mathcal{B}_0(\mathfrak{g}) = \{0\}$, а $\mathcal{B}_{i+1}(\mathfrak{g})$ прообраз центра алгебры $\mathfrak{g}/\mathcal{B}_i(\mathfrak{g})$ при каноническом эпиморфизме $\mathfrak{g} \twoheadrightarrow \mathfrak{g}/\mathcal{B}_i(\mathfrak{g})$.

г) Нормализатор любой подалгебры $\mathfrak{h} \subsetneq \mathfrak{g}$ в $\mathfrak{g}$ отличен от $\mathfrak{h}$.

2.2. Докажите, что любой ненулевой идеал нильпотентной алгебры Ли имеет ненулевое пересечение с её центром.

2.3. Пусть $\mathfrak{g}$ — нильпотентная алгебра Ли. Докажите, что подпространство $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}$ порождает $\mathfrak{g}$ как алгебру Ли тогда и только тогда, когда проекция $\mathfrak{a}$ на $\mathfrak{g}/\mathcal{D}(\mathfrak{g})$ сюръективна.

2.4. Пусть $\mathfrak{g}$ — нильпотентная алгебра Ли, и $\mathfrak{a}$ — коммутативный идеал в $\mathfrak{g}$. Докажите, что следующие условия эквивалентны:

(1) $\mathfrak{a}$ максимален по включению среди всех коммутативных идеалов в $\mathfrak{g}$.

(2) $\mathfrak{a}$ максимален по включению среди всех коммутативных подалгебр в $\mathfrak{g}$.

(3) $\mathfrak{a} = \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a})$.

2.5. Докажите, что любая алгебра Ли содержит наибольший по включению нильпотентный идеал.

2.6 (Ограничение и расширения поля скаляров)$^!$. Пусть $K_1 \subset K_2 \subset K_3$ — поля и $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли над K_2. Следующие условия эквивалентны:

(1) Алгебра $\mathfrak{g}$ нильпотентна (разрешима).

(2) Алгебра $\mathfrak{g}_{K_1}$ нильпотентна (разрешима).

(3) Алгебра $\mathfrak{g}^{K_3} := \mathfrak{g} \otimes_{K_2} K_3$ нильпотентна (разрешима).

2.7*. Пусть K — поле характеристики 2. Постройте такую разрешимую алгебру Ли, для которой:

а) не верно утверждение теоремы Ли.

б) коммутант не является нильпотентной алгеброй Ли.

В дальнейшем предполагается, что основное поле имеет характеристику 0.

2.8* (Альтернативное доказательство теоремы Ли над алгебраически замкнутым полем). Доказать по индукции, рассмотрев минимальный по включению идеал $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}$. Доказательство теоремы Ли, данное на лекции, равно как и его части, не должно использоваться при решении.

2.9. Пусть $\mathfrak{g}$ — разрешимая алгебра Ли, для которой из $[x, [x, y]] = 0, x, y \in \mathfrak{g}$, следует, что $[x, y] = 0$. Докажите, что алгебра $\mathfrak{g}$ коммутативна.

2.10*. Пусть $\mathfrak{g}$ — разрешимая алгебра Ли, для которой $\mathcal{D}^n\mathfrak{g} \neq \{0\}$. Докажите, что для $1 \leqslant i \leqslant n-1$ имеет место неравенство $\dim \mathcal{D}^i(\mathfrak{g})/\mathcal{D}^{i+1}(\mathfrak{g}) \geqslant 2^{i-1}+1$.

Напомним, что для оператора $x \in \mathfrak{gl}(V)$, где V — конечномерное векторное пространство, аддитивным разложением Жордана называется представление $x = x_s + x_n$, где x_s — полупростой, а x_n — нильпотентный оператор, и $[x_s, x_n] = 0$. Известно, что такое разложение существует, единственно, и x_s, x_n являются полиномами от x без свободного члена. Следующая задача хоть и не относится к алгебрам Ли, но её полезно сделать.

2.11. Докажите указанные выше свойства разложения Жордана (для незамкнутых полей Вам может потребоваться теория Галуа).

2.12. Пусть $\mathfrak{g}$ — разрешимая подалгебра в $\mathfrak{gl}(V)$, где V — конечномерное векторное пространство.

а) Множество всех нильпотентных элементов в $\mathfrak{g}$ образует идеал.

б*) Если $x_s \in \mathfrak{g}$ для каждого элемента $x \in \mathfrak{g}$, то $\mathfrak{g}$ является полупрямой суммой идеала из пункта а) и коммутативной подалгебры, состоящей из полупростых элементов.