ГРУППЫ И АЛГЕБРЫ ЛИ. ОСЕННИЙ СЕМЕСТР 2006.

ЛИСТОК 3. РАДИКАЛ И ПОЛУПРОСТЫЕ АЛГЕБРЫ ЛИ.

Предполагается, что основное поле имеет характеристику 0.

3.1$^!$. Пусть $(\cdot,\cdot)$ — форма Киллинга на $\mathfrak{g}$. Докажите, что $(d(x), y) + (x, d(y)) = 0$ для всех $d \in \mathrm{Der}(\mathfrak{g}), x, y \in \mathfrak{g}$.

3.2$^!$(Свойства радикала). Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли, а $\mathfrak{r}$ — её радикал. Тогда

а) Если ρ — точное представление алгебры $\mathfrak{g}$, то $\mathfrak{r}$ совпадает с ортогональным дополнением к $\mathcal{D}\mathfrak{g}$ относительно формы $(x, y)_\rho = \mathrm{tr}(\rho(x)\rho(y))$.

б) $\mathfrak{r}$ совпадает с ортогональным дополнением к $\mathcal{D}\mathfrak{g}$ относительно формы Киллинга.

в) $d(\mathfrak{r}) \subset \mathfrak{r}$ для всех $d \in \mathrm{Der}(\mathfrak{g})$.

г) Если $\mathfrak{h}$ — идеал в $\mathfrak{g}$, то радикалом алгебры $\mathfrak{h}$ является $\mathfrak{r} \cap \mathfrak{h}$, а радикалом алгебры $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ — образ $\mathfrak{r}$ при каноническом эпиморфизме.

д) Докажите, что если $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли с полупростым идеалом $\mathfrak{h}$, то полупростота $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ эквивалентна.

3.3(Свойства нильпотентного радикала). Докажите, что нильпотентный радикал алгебры $\mathfrak{g}$ совпадает с $[\mathfrak{g}, \mathfrak{r}]$, где $\mathfrak{r}$ — радикал в $\mathfrak{g}$, и является нильпотентной алгеброй Ли. Докажите также, что нильпотентный радикал совпадает с пересечением ядер всех форм вида $(\cdot,\cdot)_\rho$.

3.4$^!$. Докажите, что два непересекающихся идеала полупростой алгебры Ли ортогональны относительно любой инвариантной формы.

3.5$^!$(Редуктивные подалгебры). Подалгебра $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ называется *редуктивной*, если $\mathfrak{h}$-модуль $\mathfrak{g}$ вполне приводим.

а) Редуктивная подалгебра Ли является редуктивной алгеброй Ли (т.е. прямым произведением полупростой и коммутативной алгебр). Обратное неверно.

б) Редуктивные подалгебры в $\mathfrak{gl}(V)$ суть в точности те, для которых модуль V вполне приводим.

в) Докажите, что для редуктивной подалгебры $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ имеет место равенство $\mathfrak{n}_\mathfrak{g}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{z}_\mathfrak{g}(\mathfrak{h}) + \mathfrak{h}$.

3.6. Пусть $\mathfrak{g}$ — классическая алгебра Ли, а ρ — её тавтологическое представление.

а$^!$) Докажите, что форма $(\cdot,\cdot)_\rho$ невырождена. Выведите отсюда, что алгебры $\mathfrak{sl}_n, \mathfrak{so}_n$ $(n > 2), \mathfrak{sp}_{2n}$ полупросты.

б) Докажите, что, если алгебра $\mathfrak{g}$ полупростая классическая, то форма $(\cdot,\cdot)_\rho$ пропорциональна форме Киллинга и вычислите коэффициент пропорциональности.

3.7*. Докажите, что алгебры $\mathfrak{sl}_n, \mathfrak{so}_n, n \neq 2, 4, \mathfrak{sp}_{2n}$ просты[1].

3.8. Докажите, что вырожденная инвариантная форма на простой алгебре Ли нулевая. Выведите отсюда, что любые две инвариантные формы на простой алгебре Ли пропорциональны, если основное поле алгебраически замкнуто. Чему равна размерность пространства инвариантных форм на полупростой алгебре Ли?

[1] Позднее мы увидим, что, кроме этих, простых алгебр над алгебраически замкнутым полем ровно 5. Можно сказать, что это одна из основных целей курса.

3.9. Пусть $\mathfrak{g}$ — полупростая алгебра Ли. Постройте невырожденную симметрическую билинейную форму на алгебре $\mathfrak{g} \ltimes_{\mathrm{ad}} \mathfrak{g}$. Здесь второй множитель $\mathfrak{g}$ считается коммутативной алгеброй Ли, на которой задана структура присоединенного представления над первым множителем.

3.10 (Расширение и ограничение полей). Пусть $K_1 \subset K_2 \subset K_3$ — поля, и $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли над K_2.

а$^!$) Как соотносятся между собой радикал (нильпотентный радикал) алгебр $\mathfrak{g}_{K_1}, \mathfrak{g}, \mathfrak{g}^{K_3}$.

б$^!$) Докажите, что полупростота алгебр $\mathfrak{g}_{K_1}, \mathfrak{g}, \mathfrak{g}^{K_3}$ эквивалентна.

в) Что происходит с простотой?

3.11$^!$ (Представления алгебры $\mathfrak{sl}_2$). Здесь K — алгебраически замкнутое поле. Выберем базис $e := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, h := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, f := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ в $\mathfrak{sl}_2$. Положим $\mathfrak{b} := Ke + Kh$. Все $\mathfrak{sl}_2$-модули ниже предполагаются конечномерными.

а) Имеют место соотношения $[h, e] = 2e, [h, f] = -2f, [e, f] = h$.

б) Любой $\mathfrak{sl}_2$-модуль вполне приводим.

в) Вектор v в $\mathfrak{sl}_2$-модуле называется *старшим*, если прямая Kv устойчива относительно $\mathfrak{b}$. Докажите, что каждый модуль имеет хотя бы один старший вектор. Покажите, что для старшего вектора v имеют место соотношения $ev = 0, hv = av$, где $a \in K$ называется *весом* v.

г) Пусть v — старший вектор модуля V. Положим $v_i = f^i v, i \geqslant 0$. Докажите, что $fv_i = v_{i+1}, hv_i = (a - 2i)v, ev_i = i(a - i + 1)v_{i-1}$.

д) Ненулевые векторы v_i линейно независимы.

е) Покажите, что неприводимый $\mathfrak{sl}_2$-модуль обладает единственным старшим вектором. Его вес называется *старшим весом* $\mathfrak{sl}_2$-модуля.

ж) $\dim V$ совпадает с минимальным натуральным числом n, для которого $v_n = 0$. Старший вес неприводимого $\mathfrak{sl}_2$-модуля V равен $\dim V - 1$.

з) Существует биекция между множеством неприводимых $\mathfrak{sl}_2$-модулей и множеством целых неотрицательных чисел, при которой $\mathfrak{sl}_2$-модулю сопоставляется его старший вес. Неприводимый модуль со старшим весом d мы обозначаем через $V(d)$.

и) Пусть V — произвольный $\mathfrak{sl}_2$-модуль. Для целого i мы положим $V_i = \{v \in V | hv = iv\}$. Докажите, что

- и1) $\dim V_i = \dim V_{-i}$. Более того, для $i > 0$ e^i осуществляет биекцию между $V_{-i} \to V_i$, а f^i биекцию $V_i \to V_{-i}$.
- и2) $e : V_i \to V_{i+2}$ есть инъекция для $i < 0$ и сюръекция для $i \geqslant 0$. Сформулируйте и докажите аналогичные утверждения для f.
- и3) $V_0 \cap \ker e = V_0 \cap \ker f = V^{\mathfrak{sl}_2}$.

й) Каждому $\mathfrak{sl}_2$-модулю V мы сопоставим многочлен Лорана $\mathrm{ch}_V = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \dim V_i x^i$, называемый *характером* V. Докажите, что $\mathrm{ch}_{V_1 \oplus V_2} = \mathrm{ch}_{V_1} \oplus \mathrm{ch}_{V_2}$, $\mathrm{ch}_{V_1 \otimes V_2} = \mathrm{ch}_{V_1} \mathrm{ch}_{V_2}$.

к) Отображение $V \mapsto \mathrm{ch}_V$ инъективно.

л) Разложите в прямую сумму неприводимых модулей $V(d_1) \otimes V(d_2)$, $S^2 V(d)$, $\bigwedge^2 V(d)$.