# ГРУППЫ И АЛГЕБРЫ ЛИ. ОСЕННИЙ СЕМЕСТР 2006.

## ЛИСТОК 4. РАЗЛОЖЕНИЕ ЖОРДАНА И ТЕОРЕМА ЛЕВИ.

*Предполагается, что основное поле имеет характеристику 0. Через* $\mathfrak{g}$ *обозначена алгебра Ли, через* $\mathfrak{r}$ *её радикал*

**4.1$^!$.** Пусть $x \in \mathfrak{g}$ таков, что $\operatorname{ad} x$ — нильпотентный эндоморфизм. Тогда $\exp(\operatorname{ad} x)$ является автоморфизмом алгебры $\mathfrak{g}$.

**4.2 (Полуалгебраические линейные алгебры Ли).** Подалгебру $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$ мы назовем *полуалгебраической*, если $x_s \in \mathfrak{g}$ для любого $x \in \mathfrak{g}$.

а$^!$) Покажите, что пересечение любого количества полуалгебраических линейных алгебр является полуалгебраическим.

б$^!$) Пусть $\mathfrak{g}$ — полуалгебраическая подалгебра в $\mathfrak{gl}(V)$. Докажите, что для любых двух подпространств $V_2 \subset V_1 \subset V$ подмножество $\{x \in \mathfrak{g} | xV_1 \subset V_2\}$ является полуалгебраической подалгеброй в $\mathfrak{g}$. В частности, аннулятор любого элемента из $V$ и нормализатор любого подпространства являются полуалгебраическими подалгебрами.

в$^!$) Пусть $\mathfrak{h}$ — подалгебра в полуалгебраической линейной алгебре $\mathfrak{g}$. Тогда $\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}), \mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$ являются полуалгебраическими подалгебрами.

г) Радикал полуалгебраической линейной алгебры сам полуалгебраический.

д) Пусть $\mathfrak{g}$ — произвольная подалгебра в $\mathfrak{gl}(V)$. Докажите, что найдется наименьшая по включению полуалгебраическая подалгебра $\widetilde{\mathfrak{g}}$, содержащая $\mathfrak{g}$. Подалгебра $\widetilde{\mathfrak{g}}$ называется *полуалгебраическим замыканием* подалгебры $\mathfrak{g}$. Докажите, что $\mathfrak{g}$ является идеалом в $\widetilde{\mathfrak{g}}$ и что $[\widetilde{\mathfrak{g}}, \widetilde{\mathfrak{g}}] = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$.

е*) Предположим, что радикал линейной алгебры $\mathfrak{g}$ состоит из нильпотентных элементов. Тогда алгебра $\mathfrak{g}$ полуалгебраическая.

ж) Докажите, что коммутант любой линейной алгебры Ли является полуалгебраической подалгеброй.

з) Если представление алгебры $\mathfrak{g}$ в $V$ вполне приводимо, то подалгебра $\mathfrak{g}$ полуалгебраическая.

**4.3$^!$.** По аналогии с предыдущей задачей вводится понятие полуалгебраической алгебры в полупростой алгебре Ли $\mathfrak{g}$.

а) Докажите, что подалгебра $\mathfrak{h}$ является полуалгебраической тогда и только тогда, когда $\rho(\mathfrak{h})$ является полуалгебраической подалгеброй в $\mathfrak{gl}(V)$ для некоторого точного (или любого) представления $\mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$.

б) Пусть $\mathfrak{h}$ — полуалгебраическая подалгебра в $\mathfrak{g}$, для которой ограничение формы Киллинга с $\mathfrak{g}$ на $\mathfrak{h}$ невырождено. Покажите, что подалгебра $\mathfrak{h}$ является редуктивной. Верно ли обратное?

**4.4.** Пусть $\mathfrak{d}$ — полупростая подалгебра в $\operatorname{Der}(\mathfrak{g})$. Тогда в $\mathfrak{g}$ найдется подалгебра Леви, устойчивая относительно $\mathfrak{d}$.

**4.5(Теорема Мальцева).** а*) Для любых двух подалгебр Леви $\mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_2 \subset \mathfrak{g}$ найдутся элементы $x_1, \dots, x_k \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{r}]$, для которых $\prod_{i=1}^k \exp(\operatorname{ad} x_i)\mathfrak{s}_1 = \mathfrak{s}_2$ (на самом деле, можно ограничиться одним элементом).

б) Выведите отсюда, что любая полупростая подалгебра в $\mathfrak{g}$ сопряжена подалгебре в алгебре Леви, причем сопряжение осуществляется элементом вида $\prod_{i=1}^{k} \exp(\operatorname{ad} x_i)$, $x_i \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{r}]$.