ГРУППЫ И АЛГЕБРЫ ЛИ. ОСЕННИЙ СЕМЕСТР 2006

ЛИСТОК 5. ГРУППЫ ЛИ И ИХ КАСАТЕЛЬНЫЕ АЛГЕБРЫ.

Через K обозначено поле $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, а через G группа Ли над K. Если группа Ли обозначается большой латинской буквой, то её касательная алгебра обозначается соответствующей маленькой готической буквой.

5.1. Рассмотрим естественное представление группы $\mathrm{GL}_n(\mathbb{H})$ в пространстве $\mathbb{R}$-билинейных $\mathbb{H}$-значных форм $\mathbb{H}^n \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H}^n \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H}$. Покажите, что подпространство $\mathbb{H}$-полуторалинейных форм инвариантно относительно $\mathrm{GL}_n(\mathbb{H})$. Стабилизатор эрмитовой положительно определенной формы обозначается через Sp_n и называется группой кватернионно-унитарных матриц. Выпишите явно подпространство $\mathfrak{sp}_n = T_e(\mathrm{Sp}_n)$, докажите что оно является подалгеброй Ли в $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{H})$. Опишите его комплексификацию (как алгебру Ли).

5.2. Докажите, что группы $\mathrm{U}_n, \mathrm{SU}_n, \mathrm{O}_n, \mathrm{SO}_n, \mathrm{Sp}_n$ компактны, а группы $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}), \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$, $\mathrm{O}_{k,l}, \mathrm{U}_{k,l}, \mathrm{SO}_{k,l}, \mathrm{SU}_{k,l}$ и $\mathrm{Sp}_{k,l}$ нет (последняя группа определяется аналогично группе Sp_n, но для неопределенной формы).

5.3. а) Докажите, что группы $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}), \mathrm{SL}_n(K), \mathrm{SO}_n(K), \mathrm{Sp}_n(K), \mathrm{Sp}_n, \mathrm{U}_n, \mathrm{SU}_n$ связны.

б) Покажите, что $\mathrm{O}_{k,l} / \mathrm{O}^\circ_{k,l} \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

5.4. Докажите, что $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C}), \mathrm{Sp}_n(\mathbb{C}), \mathrm{Sp}_n, \mathrm{SU}_n$ односвязны, а $\pi_1(\mathrm{SO}_n(K)) = \mathbb{Z}_2$ для $n > 2$.

5.5$^!$ (Связная компонента единицы). Связную компоненту единицы в группе Ли G обозначают через G°. Очевидно, что это подгруппа Ли в G.

а) G° совпадает с наименьшей нормальной подгруппой $H \subset G$, для которой фактор-группа G/H дискретна.

б) Действие группы G° на связном однородном пространстве группы G транзитивно.

5.6$^!$ (Группы автоморфизмов групп Ли). Пусть G — связная группа Ли над K.

а) Докажите, что взятие дифференциала в единице определяет мономорфизм $\mathrm{Aut}(G) \hookrightarrow \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$, который является биекцией для односвязной группы G.

б*) Докажите, что для произвольной группы G образ $\mathrm{Aut}(G)$ в $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ является подгруппой Ли. Это задает на $\mathrm{Aut}(G)$ структуру группы Ли. Докажите, что если $Z(G)$ — дискретная группа, то $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})^\circ \subset \mathrm{Aut}(G)$, и постройте контрпример в общем случае.

в) Пусть задан гомоморфизм $H \to \mathrm{Aut}(G)$. Докажите, что $H \to \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ — гомоморфизм групп Ли тогда и только тогда, когда соответствующее действие $H : G$ является действием группы Ли.

г) Если алгебра Ли $\mathfrak{h}$ полупроста, то существует группа Ли H с $\mathrm{Lie}(H) = \mathfrak{h}$.

5.7$^!$ (Полупрямые произведения). а) Пусть G_1, G_2 — группы Ли над K, и $\Phi : G_1 \to \mathrm{Aut}(G_2)$ — гомоморфизм групп Ли. Докажите, что полупрямое произведение групп $G := G_1 \leftthreetimes_\Phi G_2$ наделяется естественной структурой группы Ли. При этом G_1 отождествляется с подгруппой Ли, а G_2 — с нормальной подгруппой Ли в G.

б) Покажите, далее, что $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$ отождествляется с полупрямым произведением $\mathfrak{g}_1 \ltimes_\varphi \mathfrak{g}_2, \mathfrak{g}_i = \mathrm{Lie}(G_i)$, $\varphi : \mathfrak{g}_1 \to \mathrm{Der}(\mathfrak{g}_2)$ — дифференциал гомоморфизма $G_1 \to \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}_2)$, который, в свою очередь, является композицией Φ и вложения $\mathrm{Aut}(G_2) \hookrightarrow \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}_2)$, построенного выше.

в) Если G — группа Ли, G_1, G_2 — подгруппы Ли в G, G_2 нормальна, и $G = G_1 G_2, G_1 \cap G_2 = \{e\}$, то G изоморфна полупрямому произведению G_1 и G_2.

г) Пусть $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2$ —алгебры Ли, а G_1, G_2 — соответствующие односвязные группы Ли. Пусть, далее, $\varphi : \mathfrak{g}_1 \to \mathrm{Der}(\mathfrak{g}_2)$ — гомоморфизм алгебр Ли. Покажите, что существует гомоморфизм $\Phi : G_1 \to \mathrm{Aut}(G_2)$ групп Ли, для которого $\mathfrak{g}_1 \ltimes_\varphi \mathfrak{g}_2 = \mathrm{Lie}(G_1 \leftthreetimes_\Phi G_2)$.

5.8$^!$. Пусть $\mathfrak{g}$ — разрешимая алгебра Ли. Докажите, что найдется группа Ли G с $\mathrm{Lie}(G) = \mathfrak{g}$. Если эта группа односвязна, то она диффеоморфна $\mathbb{R}^{\dim \mathfrak{g}}$.

5.9$^!$. Докажите, что для любой алгебры Ли $\mathfrak{g}$ существует группа Ли G с $\mathrm{Lie}(G) = \mathfrak{g}$.

5.10. Пусть $\mathfrak{g}$ — подалгебра в алгебре Ли строго верхнетреугольных матриц. Докажите, что $\exp(\mathfrak{g})$ является подгруппой Ли в группе верхнетреугольных матриц с касательной алгеброй $\mathfrak{g}$. Докажите, далее, что $\exp : \mathfrak{g} \to \exp(\mathfrak{g})$ является диффеоморфизмом.

5.11. Докажите, что экспоненциальное отображение $\exp : \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ не является субмерсией.

5.12. Классифицируйте, с точностью до изоморфизма, все связные коммутативные группы Ли над K.

5.13. Докажите, что компактная комплексная группа Ли является комплексным тором $\mathbb{C}^n/\Gamma$, где Γ — решетка в $\mathbb{C}^n$ ранга 2n.

5.14. Докажите, что связная компактная группа Ли, совпадающая со своим коммутантом, полупроста. То же для связной компактной группы с дискретным центром.

5.15 (Векторные поля скоростей). Пусть группа Ли G действует на многообразии X. Для $\xi \in \mathfrak{g}$ определим *векторное поле скоростей* ξ_* следующим образом: выберем кривую $\gamma(t) \subset G$ с $\gamma(0) = e, \frac{d}{dt}\gamma(t)|_{t=0} = \xi$ и для $x \in X$ положим $\xi_{*x} = \frac{d}{dt}\gamma(t)x$. Докажите, что конструкция фунториальна в следующем смысле: если $\varphi : X \to Y$ — G-эквивариантное гладкое отображение, то $d_x\varphi(\xi_{*x}) = \xi_{*\varphi(x)}$. Докажите, далее, что отображение $\xi \mapsto \xi_*$ является гомоморфизмом алгебр Ли.

5.16$^!$. Пусть H — связная подгруппа Ли в группе Ли G. Тогда $Z_G(H) = Z_G(\mathfrak{h}) := \{g \in G | \mathrm{Ad}(g)\mathfrak{h} \subset \mathfrak{h}, \mathrm{Ad}(g)|_\mathfrak{h} = id\}$, а алгебра Ли этой группы совпадает с $\mathfrak{z}_\mathfrak{g}(\mathfrak{h})$.

5.17. Пусть G — группа Ли, и $\sigma \in \mathrm{Aut}(G)$. Тогда алгеброй Ли группы σ-неподвижных точек в G является подалгебра $d\sigma$-неподвижных точек в $\mathfrak{g}$.

5.18. Докажите, что связная группа Ли нильпотентна (т.е. ряд B^iG с $B^1G = G, B^{i+1}G = (G, B^iG)$ обрывается) тогда и только тогда, когда её алгебра Ли нильпотентна.

5.19 (Ещё одно доказательство теоремы Ли). Для линейной группы Ли $G \subset \mathrm{GL}(V)$ и её характера (т.е. одномерного представления) χ положим $V_\chi := \{v \in V | gv = \chi(g)v, \forall g \in G\}$. Докажите, что группа $N_{\mathrm{GL}(V)}(G)$ переставляет пространства V_χ. Выведите отсюда доказательство теоремы Ли.

5.20. Докажите, что связная разрешимая группа Ли над $\mathbb{R}$ содержит нормальную подгруппу Ли коразмерности 1.

5.21*. Пусть G — связная разрешимая вещественная группа Ли, H — её связная нормальная подгруппа Ли коразмерности 1. Докажите, что в G найдется одномерная подгруппа F, для которой $G = H \leftthreetimes F$.