ГРУППЫ И АЛГЕБРЫ ЛИ. ОСЕННИЙ СЕМЕСТР 2006.

ЛИСТОК $5\frac{1}{2}$. КАРТАНОВСКИЕ ПОДАЛГЕБРЫ.

Через K обозначено поле $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$. Если группа Ли обозначается большой латинской буквой, то её касательная алгебра обозначается соответствующей маленькой готической буквой.

Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли. *Картановской подалгеброй в* $\mathfrak{g}$ называется нильпотентная подалгебра, совпадающая со своим нормализатором. Определение регулярного элемента дословно переносится с полупростого случая.

$5\frac{1}{2}$.1. Как связаны картановские подалгебры в вещественной алгебре Ли и в её комплексификации, в комплексной алгебре Ли и её овеществлении?

$5\frac{1}{2}$.2. Докажите, что для поля $\mathbb{C}$ все картановские подалгебры сопряжены (в соотв. группе Ли G), и совпадают с подалгебрами вида $\mathfrak{g}^0(x) := \{y \in \mathfrak{g} | \operatorname{ad}(x)^N y = 0, N \gg 0\}$, где x — регулярный элемент в $\mathfrak{g}$.

$5\frac{1}{2}$.3. Постройте пример вещественной алгебры Ли и двух её несопряженных картановских подалгебр.

$5\frac{1}{2}$.4. Пусть $\mathfrak{h}$ — идеал в алгебре Ли $\mathfrak{g}$. Как связаны друг с другом картановские подалгебры в $\mathfrak{g}$ и в $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$?

$5\frac{1}{2}$.5*. Пусть $\mathfrak{g}$ — разрешимая алгебра Ли. Докажите, что любые две картановские подалгебры в $\mathfrak{g}$ сопряжены.